الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
وزارة التعليم العالي والبحث العلمي
جامعة فرحات عباس –سطيف1
كلية العلوم الاقتصادية والتجارية وعلوم التسيير
قسم التعليم الأساسي

مطبوعة بيداغوجية علمية تحت عنوان:

مدخل لنظرية الاحتمالات والتوزيعات الاحتمالية

– أمثلة تطبيقية وتمارين –

مقدمة لطلبة السنة الأولى جذع مشترك

من إعداد:

الدكتور: شلاعي فاتح

أستاذ محاضر– ب –

السنة الجامعية 2021-2020

محتوى المطبوعة		الصفحة
الفصل الأول	**الاحتمالات، فضاء العينة والحوادث العشوائية**	**6**
	مفاهيم وقواعد أولية حول الاحتمالات	7
	الأحداث العشوائية وطرق حساب الاحتمالات	9
	الاحتمالات الشرطية، الكلية ونظرية Bayes	17
	طرق الحساب العددي (التركيبي)	24
الفصل الثاني	**المتغير العشوائي والتوزيع الاحتمالي**	**32**
	المتغير العشوائي: التعريف الرياضي والإحصائي	33
	المتغير العشوائي المنفصل(المتقطع)	33
	المتغير العشوائي المتصل (المستمر)	41
	المعالم الإحصائية للمتغير العشوائي (الأمل الرياضي، التباين)	45
الفصل الثالث	**القوانين الاحتمالية للمتغيرات العشوائية المنفصلة والمتصلة**	**51**
	قوانين احتمالية للمتغير العشوائي المنفصل	52
	قوانين احتمالية للمتغير العشوائي المتصل	71
المراجع		**86**
الملاحق		**88**

أولا: توصيف المقياس الذي تغطيه المطبوعة

اسم المقياس	المستوى	التخصص	السداسي
إحصاء-2-	**السنة أولى جذع مشترك**	**القسم الأساسي**	**الثاني**

ثانياً: أستاذ المقياس

د.شلاعي فاتح، أستاذ محاضر-ب- كلية العلوم الاقتصادية والتجارية وعلوم التسيير، جامعة فرحات عباس، سطيف-1- حاصل على دكتوراه علوم تخصص:"إحصاء تطبيقي" بالمدرسة العليا للإحصاء والاقتصاد التطبيقي.الجزائر.

البريد الالكتروني: . fatih.chellai@univ-setif.dz

الهاتف: 0663.52.61.84 (213+)

ثالثاً :أهداف المطبوعة

- التعرف على ماهية نظرية الاحتمالات، ومفهوم الاحتمال، الحوادث الاحتمالية (العشوائية التصادفية...)
- حل مسائل في الاحتمالات توظف المتغيرات العشوائية ، قانون الاحتمال ، الأمل ألرياضياتي، التباين و الانحراف المعياري.
- معرفة طرق الحساب التوفيقي (العددي) لتوظيفه في حساب الاحتمالات.
- القدرة على نمذجة التجارب العشوائية باستعمال قوانين احتمالية معروفة (متصلة أو منفصلة)

تمهيـــــــ

Schlaifer و L. J. Savage وغيرهم زخماً للنظريات الإحصائية المستندة أساسًا إلى أساليب تعود إلى عالم الرياضيات الإنجليزي في القرن الثامن عشر توماس بايز، والتي أصبحت تُسّمى بالإحصاء البيزي أو: (الاستدلال البيزي، المقاربة البيزية للاستدلال، نظرية بايز للاستدلال...)

من زاوية أخرى، الإحصاء الرياضي هو فرع معترف به من الرياضيات، ويمكن دراسته من أجل طلاب الرياضيات. اليوم ، يتم تطبيق نظريات الإحصاء والاحتمالات في مجال: الهندسة والفيزياء وعلم الفلك ، وضمان الجودة والموثوقية، وتطوير الأدوية، والصحة العامة والطب ، وتصميم التجارب الزراعية أو الصناعية، وعلم النفس التجريبي، وما إلى ذلك. تجدر الإشارة مرة أخرى إلى أن ظهور الاهتمام في المشاكل المتعلقة بالاحتمالات نشأت في المقام الأول من تطوير التأمين، وإنّ ما أثار حقا الاهتمام بالاحتمال جاء من طلبات المقامرة و ألعاب الحظ، وتاريخياً، كان العالم شيفالييه دي مير هو من اقترب من باسكال (1623-1662) حول ما يسمى بمشكلة النقاط – مثال مبكر للاستشارات الإحصائية، ثم بدأ باسكال مراسلات مع فيرمات (1601-1665) ، وأنشأ كلا الرجلين بعض أسس الاحتمال، والتي وضع أسسها الحقيقية هو الرياضي الروسي "كولموغروف".

هذه المطبوعة هي جزء تمهيدي في نظرية الاحتمال والاستدلال الإحصائي، **والباحث لم يقم إلا بجمع ما تفرق من معلومات ومعارف من هنا وهناك ورتبها وقام بتبويبها في هذا الكتاب، وإلا فالمراجع الرصينة والشاملة لهذا العلم لكثيرة ومتنوعة بشتى اللغات، وعلماؤنا في بلاد الإسلام عامة والعربية خاصة صنفوا في هذا العلم ما يجعل الباحث والطالب في غنى عن ما اجتهدنا فيه في هذا الجزء.** لا يلزم معرفة مُسبقة بأيّ من الاحتمالات أو الرياضيات المتقدمة حتى يطّلع عليها الطالب ، على الرغم من أنّ المفاهيم الأولية للإحصاء الوصفي قد تكون ضرورية في بعض محاور هذه المطبوعة ; بمعنى أن الطالب يحتاج المفاهيم الأساسية التي تمت مناقشتها في الإحصاء-1-.

الفصل الأول

الاحتمالات، فضاء العينة والحوادث العشوائية

أولاً: مفاهيم أولية لنظرية الاحتمالات

1- تعريف نظرية الاحتمالات

نظرية الاحتمال هي النظرية التي تدرس سلوك الظواهر العشوائية، بالنسبة للرياضيين فالاحتمالات هي عبارة عن أرقام محصورة في المجال بين 0 و +1، والتي تُحدّد احتمال حصول أو عدم حصول حدث معين عشوائي (أي حدث غير مؤكد). نرمز لاحتمال الحدث A بالرمز $\mathbf{P(A)}$.حسب بديهيات (أو مسلمات) الاحتمال ، تناقش نظرية الاحتمالات مصطلحين غاية في الأهمية : **المتغير العشوائي** و **التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي**.

2- أقسام الاحتمالات: الاحتمالات الرياضية والاحتمالات الإحصائية (التجريبية) : يمكن تقسيم الاحتمالات إلى احتمالات رياضية (أو نظرية) و احتمالات إحصائية (أو تجريبية).

- **الاحتمالات الرياضية (النظرية):**

وهي الاحتمالات التي يمكن حسابها بدقة، وتكون نتائجها ثابتة ، حتى لو تغير الزمان أو المكان ، أي لا تختلف نتائجها من مجتمع لآخر ولا من مكان لآخر .

- **الاحتمالات الإحصائية (التجريبية)**

وتختلف هذه المقاربة (الطريقة) عن الاحتمالات الرياضية من حيث أنه لا يمكن تقديرها بالطرق الرياضية ، بل لا بد لقياسها من إجراء تجارب على الظواهر المختلفة وتثبيت البيانات الإحصائية المتعلقة بتلك الظواهر ، والاحتمالات الإحصائية تختلف من مجتمع لأخر ومن زمان لآخر أي أنّها ليست ثابتة .

والفرق بين الاحتمالات الرياضية والاحتمالات الإحصائية يتمثل بالآتي :

الاحتمالات الإحصائية (التجريبية) قد تتغير من مجتمع لآخر، وربما تتغير في المجتمع الواحد نفسه بين فترة وأخري، بينما الاحتمالات الرياضية لا تتغير مطلقا لا في المجتمع الواحد ولا في المجتمعات المختلفة. وتحت شروط معينة (مثل زيادة عدد التجارب العشوائية x بشكل كبير)، فانّ الاحتمال التجريبي (f_n)يقترب إلى قيمة الاحتمال النظري $P(A)$ ، ويمكن توضيح ذلك رياضيا كما يلي:

$$\lim_{n\to\infty} f_n = \frac{x}{n} \to P(A)$$

ملاحظة: يمكن كذلك تقسيم الاحتمالات إلى احتمالات ممكنة، أكيدة أو مستحيلة

3- المفاهيم الأساسية لنظرية الاحتمالات

3-1 التجربة العشوائية

ضمن مجال نظرية الاحتمالات، **التجربة العشوائية** هي كل تجربة (أو ظاهرة) نقوم بها (أو ندرسها) وتكون مكوناتها معروفة ومحددة ولكن نتائجها غير معلومة مسبقاً. أمثلة عن التجربة العشوائية: تجربة إلقاء قطعة النقود المعدنية، وهي تجربة عناصرها أو نتائجها معلومة وهي المجموعة **Ω**: {صورة ، كتابة}، ولكن عند رمي قطعة النقود نحن لا نعلم بشكل مؤكد ما هي النتيجة، قد تظهر لنا الصورة أو الكتابة.

3-2 مجموعة الأساس (فضاء العينة)

هي مجموعة العناصر الممكنة التي تُمثل نواتج التجربة العشوائية (أو الظاهرة المدروسة)، وتُسمى أيضاً فضاء الإمكانات أو فضاء النواتج أو فضاء الحوادث. في اغلب المراجع يُرمز لها بالرمز: E، **Ω** ، S... مثلاً، فضاء العينة لتجربة رمي قطعة نقود مرة واحدة **هو** = {صورة، كتابة}

3-3 الحدث العشوائي

هو مجموعة جزئية من فضاء العينة ، واحتمال وقوع أي حدث عشوائي في تجربة ما (أو ظاهرة مدروسة ما) هو نسبة عدد حالات وقوعه بالفعل (الأحداث الملائمة) في التجربة إلى عدد كل الحالات الممكنة فيها (فضاء العينة).

3-4 أنواع الحدث في نظرية الاحتمالات

هناك تقسيمات متعددة للأحداث العشوائية ضمن إطار نظرية الاحتمالات، وهذا تبعاً للمعيار المستعمل في هذا التقسيم (أو التصنيف)، نجد الحدث البسيط، الحدث المركب، الحدث المستحيل، الحدث المتمم، الحدث العكسي...الخ. نوضح في الأسفل أهم الأنواع التي يمكن أي يصادفها الطالب في هذا المستوى من البحث.

- ✓ **الحدث البسيط**: في نظرية الاحتمالات هو الحدث المكّون من عنصر واحد فقط، ومن أمثلته حدث ظهور العدد {1}في تجربة إلقاء حجر النرد .أو ظهور "صورة" عند رمي قطعة نقدية معدنية...
- ✓ **الحدث المركّب**: في نظرية الاحتمالات هو الحدث الذي يحتوي على أكثر من عنصر من عناصر مجموعة الأساس، ومن أمثلته حدث ظهور عدد زوجي في تجربة إلقاء حجر النرد، حيث تكون عناصره هي {2، 4، 6}، أو حدث ظهور أعداد مجموعها يساوي 10 عند رمي قطعتي نرد، حيث عدد عناصره هي الثنائيات: {(6،4), (5،5) }...
- ✓ **الحدث المستحيل** : هو الحدث الذي لا يحتوي على أي عنصر من عناصر مجموعة الأساس (أي ضمن شروط التجربة العشوائية ، أو تحت شروط الظاهرة المدروسة)، ومن أمثلة هذه الحوادث، حدث ظهور العدد {7 }في تجربة إلقاء حجر النرد.
- ✓ **الحدث الأكيد (المؤكد)**: هو الحدث الذي يضم كافة عناصر فضاء العينة (مجموعة الأساس)، أي أنّ هذا الحدث يحتوي على كافة الإمكانات التي تمثل ناتج التجربة العشوائية. ومن أمثلتها: الحدث

العشوائي لظهور عدد أقل من {7} في تجربة إلقاء حجر النرد، وذلك لأنّ كل الاحتمالات الممكنة هي أعداد أقل من {7}.

✓ **الأحداث المنتظمة :** هي الأحداث المتساوية في احتمالات حدوثها (**طبعاً تحت مقاربة الاحتمال النظري**) .ففي تجربة إلقاء حجر النرد مرة واحدة يكون احتمال ظهور العدد {2} واحتمال ظهور العدد {5} متساوي، وكل منهما يساوي 6/1 ،وبالتالي فهي أحداث منتظمة.

✓ **الأحداث الشاملة:** إذا كان لدينا فضاء عينة ما **Ω** وتضم أحداث مختلفة ولتكن C, B, A :،فإنّ هذه الأحداث الثلاثة تُسمى أحداث شاملة (بالإنجليزية) Exhaustive Events :إذا تحققت الشروط الثلاثة التالية:

- **أن تكون الأحداث متنافية فيما بينها**
- **ألا يكون أي حدث منها مجموعة خالية**
- **أن يكون اتحادها يساوي فضاء العينة**

✓ **الأحداث المكملة:** الحدثان المكّملان هما الحدثان اللذان يكملان بعضهما البعض، أي أنهما الحدثان اللذان يكون اتحادهما يساوي فضاء العينة (مجموعة الأساس) .تفصيلاً، لنرمز لحدثين B, A عشوائيين ، يكونان مكملين إذا تحققت المساواة (ضمن نظرية المجموعات): $A \cup B = \Omega$، نرمز للحدث المتمم للحدث Aبالرمز $\overline{A}$.

4- حساب احتمال حدث عشوائي

إذا كان الحدث A يمكن أن يحدث بطرق عددها n_A من بين نواتج متساوية الفرصة في الوقوع عددها N، فإن احتمال وقوع الحدث A يعرف كما يلي $P(A)=\frac{n_A}{N}$. حيث:

- ✓ $\mathbf{P(A)}$ = احتمال وقوع الحدث $\boldsymbol{A}$.
- ✓ n_A = عدد الطرق التي يمكن أن يقع بها الحدث $\boldsymbol{A}$.
- ✓ $\mathbf{N}$ = العدد الكلي للنواتج المتساوية الفرص في الوقوع .

ويمكن تصور الاحتمال باستخدام هذا الشكل الهندسي،



الشكل (1)

ففي الشكل أعلاه، تمثّل الدائرة الحدث A (أو مجموع الأحداث الملائمة) بينما تمثل المساحة الكلية للمستطيل كل النواتج الممكنة للتجربة العشوائية. وتتراوح $\mathbf{P(A)}$ بين **1و 0**. يمكن استنتاج حالات خاصة للاحتمال من هذا التعريف وهي:

- إذا كانت $P(A)=0$ ، فإن الحدث A لا يمكن أن يقع (حدث مستحيل) .
- وإذا كانت $P(A)=1$ ، فإن الحدث A مؤكد الوقوع (حدث أكيد) .
- وإذا استخدمنا $P(\overline{A})$ لتُمثّل احتمال عدم وقوع الحدث A، أي احتمال الحدث العكسي $\overline{A}$ فإنّ ،

$$P(A)+P(\overline{A})=1$$

5- أمثلة حول حساب الاحتمال

مثال (1) : عند إلقاء قطعة نقود متوازنة فإن الصورة (ص) والكتابة (ك) يمثلان ناتجين لهما نفس فرصة الحدوث ، أي أنّ

$$P(\text{ص}) = \frac{n_{\text{ص}}}{N} = \frac{1}{2}$$
$$P(\text{ك}) = \frac{n_{\text{ك}}}{N} = \frac{1}{2}$$
و
$$P(\text{ص}) + P(\text{ك}) = 1$$

مثال (2) : عند إلقاء حجر نرد غير مُتحيّز فإن هناك ستة نواتج متساوية الفرصة في الحدوث،

$\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$ ومن ثمّ فإن ، $P(1) = P(2) = P(3) = P(4) = P(5) = P(6) = \frac{1}{6}$

- ضمن هذه التجربة العشوائية، ما هو احتمال عدم ظهور الرقم 1 ؟

نرمز ب M الحدث العشوائي: ظهور الرقم 1 ، منطقياً M يمثل أيضا الحدث العكسي للحدث العشوائي: عدم ظهور الرقم 1 عند رمي زهرة النرد ونرمز له $\overline{M}$، ولهذا نستعمل إحدى خواص حساب الاحتمال المذكورة أعلاه، وتكون الإجابة كما يلي:

$$P(\overline{M}) = 1 - P(M) = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$$
و
$$P(M) + P(\overline{M}) = \frac{1}{6} + \frac{5}{6} = \frac{6}{6} = 1$$

مثال (3): لاختيار ممثل قسم تربوي يضم 52 طالب من بينهم 20 فتاة، رقّمنا الطلبة من 1 إلى 52، وقمنا بخلط الأوراق جيداً، التجربة العشوائية هي سحب ورقة واحدة، ما هو احتمال أن تكون الورقة لفتاة؟

نرمز للحدث العشوائي: **أن تكون الورقة المسحوبة لفتاة** بالرمز **J** ، ونحسب احتماله كما يلي:

$$P(J) = \frac{n_J}{N} = \frac{20}{52} = \frac{5}{13}$$

وبما أنّ القسم يحتوى على 32 طالب من الذكور، فانّ احتمال أن لا تكون الورقة المسحوبة لفتاة $P(\overline{J})$ و

$$P(\overline{J}) = 1 - P(J) = 1 - \frac{20}{52} = 1 - \frac{5}{13} = \frac{8}{13}$$

و $P(\overline{J}) + P(J) = 1 \Rightarrow \frac{8}{13} + \frac{5}{13} = 1$

مثال (4) افترض أننا حصلنا في مئة رمية لعملة متوازنة على 53 صورة ، 47 كتابة . فإنّ التكرار النسبي للصورة يكون 53/100 أو 0.53 . إن هذا هو التكرار النسبي أو الاحتمال التجريبي وينبغي تمييزه عن **الاحتمال الكلاسيكي** أو المسبق (الذي ينص على أن: $p(ك) = p(ص) = 0.5$)، ومع تزايد عدد الرميات ليقترب من ما لانهاية فإن التكرار النسبي أو الاحتمال التجريبي يقترب من الاحتمال المسبق أو الكلاسيكي. (انظر للجدول أسفل).

الجدول (1): يمثل الفرق بين الاحتمال النظري والاحتمال التجريبي

الاحتمال النظري (الكلاسيكي)	الاحتمال التجريبي
• تجربة عشوائية لرمي زهرة نرد مرة واحدة، احتمال ظهور الرقم "5" هو.  $P\left(5 \text{ ظهور الرقم}\right) = \frac{1}{6} =$ 0.1666	-تجربة عشوائية لرمي زهرة نرد 1000 مرة، مع تسجيل الرقم الظاهر عند كل رمية، فظهر الرقم "5" 130 مرة.  $P\left(5 \text{ ظهور الرقم}\right) = \frac{130}{1000} = 0.13$

المصدر: من إعداد الباحث

على سبيل المثال في الجدول أعلاه، لتجربة عشوائية لرمي زهرة نرد، فإنّ التكرار النسبي أو الاحتمال التجريبي قد يكون **0.13** في حالة **1.000** رمية ، و **0.161** في حالة **10.000** رمية ، وهكذا إلى أن نقترب إلى قيمة الاحتمال النظري.

6- قواعد حساب احتمال الأحداث المتعددة

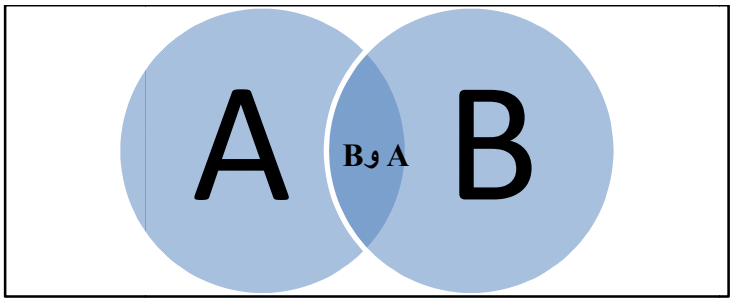
- **قاعدة الجمع للأحداث المتنافية** : نقول عن حدثان $\boldsymbol{A}, \mathbf{B}$ أنهما **متنافيان** بالتبادل إذا كان وقوع $\boldsymbol{A}$ يحجب او يمنع وقوع الحدث $\mathbf{B}$ والعكس بالعكس . عندئذ تتحقق المساواة التالية:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

- **قاعدة الجمع للأحداث غير المتنافية** : يعتبر الحدثان $\boldsymbol{A}, \mathbf{B}$ غير متنافيين إذا كان وقوع $\boldsymbol{A}$ لا يحجب ولا يمنع وقوع $\mathbf{B}$ والعكس بالعكس . فيكون

$$(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

و تطرح قيمة الاحتمال $P(A \cap B)$ حتى لا يتم حسابها مرتين . ويمكن تمثيل هذه المساواة بيانيا في الشكل أسفل .



الشكل (2)

- **قاعدة الضرب للأحداث المستقلة** : يعتبر الحدثان A, B مستقلين إذا كان وقوع $\boldsymbol{A}$ غير مرتبط بأي طريقة بوقوع $\mathbf{B}$. عندئذ الاحتمال المشترك للحدثين $\mathbf{B}, \boldsymbol{A}$ هو

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$$

- **قاعدة الضرب للأحداث غير المستقلة** : يعتبر الحدثان غير مستقلين إذا كان وقوع أحدهما مرتبطاً بطريقة ما بوقوع الآخر (أو تحت شروط التجربة العشوائية، أو في ظل شروط الظاهرة محل الدراسة). حينها يكون الاحتمال المشترك مُعّرف كما يلي:

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B|A)$$

وتُقرأ : " احتمال وقوع كل من الحدثين $\boldsymbol{A}$, $\mathbf{B}$ يساوى احتمال وقوع الحدث $\boldsymbol{A}$ مضروباً في احتمال وقوع الحدث $\mathbf{B}$ إذا علم أن الحدث $\boldsymbol{A}$ قد وقع فعلا " . $P(B|A)$ **=** الاحتمال الشرطي للحدث $\mathbf{B}$ علماً بأن الحدث قد وقع فعلا.

في هذه الأمثلة (من 5 إلى 8) نوضح عملياً أهم النقاط والمفاهيم النظرية التي تطرقنا إليها في العمليات على الاحتمالات.

مثال (5): لتكن التجربة العشوائية: "رمي زهرة نرد مرة واحدة"، يمكن الحصول على واحد من ستة نواتج ممكنة (وهي مجموعة الأساس) $\boldsymbol{\Omega}$: $\{\mathbf{1,2,3,4,5,6}\}$. نهتم بالحدث العشوائي :" ظهور الرقم 2 أو 3". السؤال ما هو احتمال هذا الحدث العشوائي؟

بما أن الرمية واحدة فقط، فانّ ظهور الرقم 2 حدث منافي لظهور الرقم 3، أي من المستحيل أن يظهرا الرقمان معاً في نفس الوقت وفي نفس الرمية، لهذا نطبق قاعدة الأحداث المتنافية، ويكون احتمال الحصول على **2** أو **3** في رمية واحدة:

$$P(2 \text{ او } 3) = \mathrm{P}(2) + \mathrm{P}(3) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

بنفس الطريقة لو نطبق على أكثر من رقم ، مثلاً، احتمال الحصول على الرقم 2 أو 3 أو 4، يكون محسوب كما يلي:

$$P(2 \text{ او } 3 \text{ او } 4) = \mathrm{P}(2) + \mathrm{P}(3) + \mathrm{P}(4) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

مثال (6) : لدينا قسم سنة أولى جذع مشترك علوم اقتصادية، يضم 40 طالب، من خلال نتائج امتحان السداسي الأول، 10 طلبة تحصلوا على المعدل في مقياس الإحصاء والرياضيات، 18 طالب تحصلوا على المعدل في الإحصاء و12 طالب في الرياضيات. قمنا بترقيم الطلبة وسحبنا رقم بطريقة عشوائية، ما هو احتمال أن يكون الطالب حاصل على المعدل في **الإحصاء أو الرياضيات؟**

نرمز لمقياس الإحصاء بـ S والرياضيات بـ M، إذا الحدث العشوائي، "**الإحصاء أو الرياضيات**" يُكتب،(S MU)، ويُحسب كما يلي:

$$P(S \text{ أو } \mathrm{M}) = P(S \cup M) = \mathrm{P}(\mathrm{S}) + \mathrm{P}(\mathrm{M}) - \mathrm{P}(\mathrm{S} \cap \mathrm{M}) = \frac{18}{40} + \frac{12}{40} - \frac{10}{40} = \frac{20}{40} = \frac{1}{2}$$

مثال (7) : تعتبر نواتج رميتين متتاليتين لقطعة نقود متوازنة أحداثاً **مستقلة** . فناتج الرمية الأولى لا يؤثر على أي نحو على ناتج الرمية الثانية . فيكون احتمال الحصول على كتابة (H) في الرميتين محسوب كما يلي:

$$P(H_1 \text{ و } H_2) = P(H_1 \cap H_2) = P(H_1) \bullet P(H_2) = \frac{1}{2} \bullet \frac{1}{2} = \frac{1}{4} = 0.25$$

نفس الأمر في حالة رمي ثلاث قطع نقدية بصفة متتالية، فيكون احتمال الحصول على كتابة (H) في 3 رميات كما يلي:

$$\mathrm{P}(H_1 \text{ و } H_2 \text{ و } H_3) = \mathrm{P}(H_1 \cap H_2 \cap H_3) = \mathrm{P}(H_1) \bullet \mathrm{P}(H_2) \bullet \mathrm{P}(H_3) = \frac{1}{2} \bullet \frac{1}{2} \bullet \frac{1}{2} = \frac{1}{8} = 0.125$$

7- الاحتمالات الشرطية ونظرية بايز(Bayes Theorem)

ما هو الاحتمال الشرطي؟ للإجابة على هذا السؤال لدينا هذا التعريف:

لتكن A حادثة من مجموعة الأساس E حيث $p(A) \neq 0$. نعرّف على E حدثاً عشوائياً جديدا يرمز له بالرمز B حيث من أجل كل حادثة B نكتب : $P(B/A) = \frac{p(B \cap A)}{P(A)}$، و يسمى الاحتمال الشرطي ل B علما أن A محققة، في بعض المراجع كلتا الصيغتين متكافئة $\boldsymbol{p_A(B) = p(B/A)}$ ، و تقرأ " احتمال B علما أن A محققة "

مثال (8) لدينا صندوق يحتوى على 10 كريات بيضاء و 8 سوداء و 7 زرقاء، التجربة العشوائية تنص على سحب ثلاث كريات الواحدة تلوى الأخرى دون إرجاع. ما هو احتمال أن تكون الكرة الأولي والثانية زرقاء؟

أولا، السحب دون إرجاع يعني أن السحب الأول (الحدث الأول) يؤثر في السحب الثاني (الحدث الثاني)، الإجابة تكون كما يلي على السؤال، احتمال سحب كرة زرقاء في السحب الأول B_1 هو،

$$P(B_1) = \frac{7}{25}$$

فإذا كانت الكرة الأولى المسحوبة هي فعلا زرقاء ، سيصبح في الصندوق **6** كريات زرقاء فقط من مجموع **24** كرية متبقية في الصندوق . ويكون **الاحتمال الشرطي** لسحب كرة زرقاء في السحب الثاني B_2 ، تحت شرط أن الكرة الأولى كانت زرقاء B_1 ولم تعد للمجموعة ، هو

$$P(B_2 / B_1) = \frac{6}{24} = 0.25$$

وسيكون فاحتمال سحب كرة زرقاء في السحبة الأولى، بدون إرجاع، وسحب كرة زرقاء في السحبة الثانية هو

$$P(B_1 و B_2) = P(B_1) \bullet P(B_2 / B_1) = \frac{7}{25} \bullet \frac{6}{24} = \frac{42}{600} = \frac{7}{100} = 0.07$$

يمكن شرح هذا الاحتمال، "تحت مقاربة الاحتمال النظري"، أن لو قمنا بهذه التجربة العشوائية 600 مرة لسحب كرتين الواحدة تلوى الأخرى، ستكون نتائج 42 تجربة عشوائية أنّ الكرتين من لون ازرق.

8- دستور الاحتمالات الكلية

مفهوم تجزئة مجموعة الأساس: نسمي تجزئة مجموعة أجزاء لهذه المجموعة كلها ليست خالية منفصلة مثنى مثنى (لا يوجد جزءان لهما عنصر مشترك) و اتحادهما المجموعة الكلية، باستعمال رموز نظرية المجموعات، لدينا

1) $A_i \neq \phi$ و **2)** $A_i \cap A_j = \phi$ و **3)** $A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4 \cup A_5 = E$

الاحتمال الكلي ونظرية بايز: لتكن A_1، A_2، A_3، ...، A_n حوادث احتمالاتها غير معدومة تشكل تجزئة للمجموعة الشاملة E . لدينا من أجل كل حادثة B

$$p(B) = p(A_1 \cap B) + p(A_2 \cap B) + ... + p(A_n \cap B)$$

مع : $p(A_k \cap B) = p(A_k) \times p_{A_k}(B)$ من أجل كل k حيث $1 \leq k \leq n$، اذا :

$$p(B) = \sum_k p(A_k) \times p_{A_k}(B)$$

مثال (1)

فريق لكرة القدم احتمال فوزه على منافسه هو 0.7 إذا لم تمطر و 0.5 إذا أمطرت، فإذا كان احتمال سقوط المطر في يوم المباراة حسب الأرصاد الجوية هو 0.4 ، فما هو احتمال فوز الفريق على منافسه عندئذ ؟

الحل

ليكن A هو الحادث "سقوط المطر" $p(A) = 0.5$

$\overline{A}$ هو الحادث " عدم سقوط المطر" $p(\overline{A}) = 1 - p(A) = 0.6$ ، وليكن B هو الحادث "فوز الفريق"

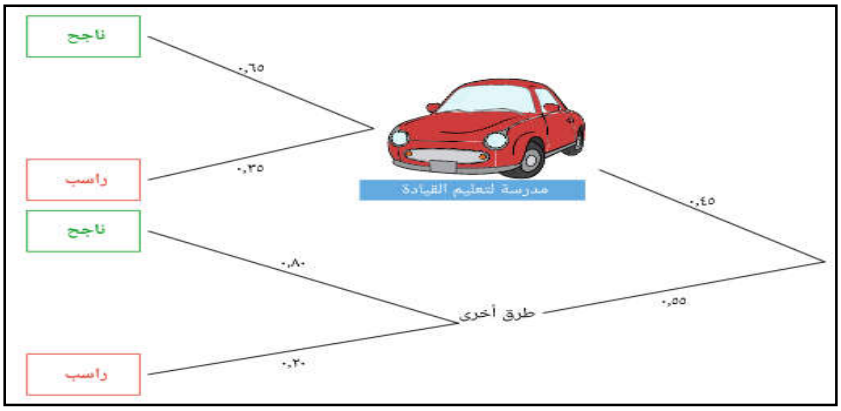
$$p(B) = p(A) \times p_A(B) + p(\overline{A}) \times p_{\overline{A}}(B)$$

$$p(B) = 0.4 \times 0.5 + 0.6 \times 0.7 = 0.62$$

مثال (2) (هذا المثال بيداغوجي بحت)

أُجرِيَت دراسة مسحية شملت عددًا من قائدي السيارات عن المكان الذي تعلَّموا فيه القيادة. تعلَّم خمسة 55٪ من السائقين قيادة السيارات لدى مدرسة لتعليم قيادة السيارات، وتعلم الخمسة والأربعون بالمائة الآخَرون قيادة السيارات من خلال الأسرة أو الأصدقاء (سنُطلِق على ذلك «طرق أخرى»). مِن بين الذين ذهبوا إلى مدرسة لتعليم قيادة السيارات، نجح 53٪ في اختباراتهم في المرة الأولى، ومِن بين الذين تعلَّموا من خلال طرق أخرى، نجح 20٪ في المرة الأولى.

المطلوب : ارسم مُخطَّط الشجرة الاحتمالية لتمثيل النتائج الممكِنة لاختبارات مُتعلِّمي قيادة السيارات، المذكورة بالأعلى



الشكل (3) . مخطط الشجرة الاحتمالية. **المصدر**:بتصرف من الباحث، انظر الرابط (مهمة جدا هذه المنصة التعليمية للطلبة وانصح بها). https://www.nagwa.com/ar/worksheets/235104030756/

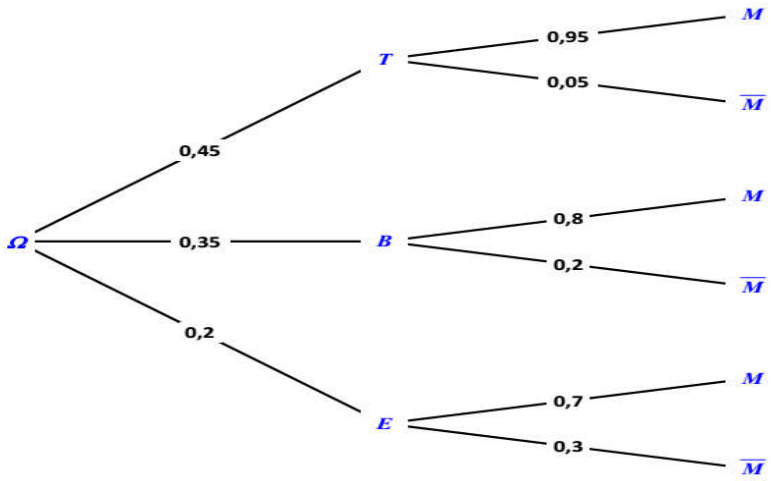
مثال 3

في قطاع التنقيب عن البترول في الجزائر، تشتغل ثلاث شركات أجنبية (T,B,E)، تقتسم هذا السوق بالنسب التالية: T=45%، B=35% و الشركة E=20%، في إطار قانون المحروقات الجديد الذي أعدته وزارة الطاقة، تشير التقارير الرسمية على أنّ نسبة **عدم تجديد عقود** هذه الشركات (وذلك عند انتهاء مدتها القانونية) هي على الترتيب:5%،20% و 30%. **التجربة العشوائية** تنص على اختيار عقد تنقيب واحد من بين جميع عقود هذه الشركات، ونفترض أن احتمالات السحب مساوية لنسب الحصص السوقية لكل شركة في قطاع التنقيب.

المطلوب: ترجم معطيات المسألة إلى شجرة احتمالية؟ ما هو احتمال أن يكون العقد للشركة T وهو غير قابل للتجديد؟ ما هي نسبة عدم تجديد عقود التنقيب في الجزائر لهذه الشركات الأجنبية؟ ما هي نسبة تجديد عقود التنقيب عن النفط في الجزائر للشركاء الأجانب؟ إذا ما تم اختيار عقد تنقيب غير قابل للتجديد خلال التجربة العشوائية للسحب، ما هو احتمال أن يكون العقد للشركة T؟ أن يكون راجع للشركة E؟

الحل النموذجي للمثال

نرمز للحدث العشوائي:" تجديد العقد" بـ M، وبـ $\overline{M}$ للحدث العشوائي: "عدم تجديد العقد". الاحتمالات أن يكون العقد المسحوب للشركات: T,B,E هي: $p(T)=0.45; p(B)=0.35; p(E)=0.2$ ، وهو ما مبين في الفروع الأولى للشجرة الاحتمالية في الأسفل.الاحتمالات في الفروع الثانية للشجرة الاحتمالية تقابل، احتمال أن يكون العقد "قابل للتجديد" أو "غير قابل للتجديد" وهو عائد للشركة Tأو B أو E، وهو يقابل الكتابة الرياضية: $p(M|T)=0.95; p(\overline{M}|T)=0.05; p(M|B)=0.80; p(\overline{M}|B)=0.20; p(M|E)=0.70; p(\overline{M}|E)=0.30$ ونرسم الشجرة الاحتمالية كما يلي:



- احتمال أن يكون العقد للشركة T وهو غير قابل للتجديد: باستعمال نظرية بايز للاحتمال الشرطي، يمكننا كتابة هذا الاحتمال رياضياً كما يلي: $p(T\cap\overline{M})=p(T)\times p(\overline{M}|T)$ ، بالاعتماد على القيم المحسوبة سالفاً، نجد: $p(T\cap\overline{M})=0.45\times0.05=0.0225=\frac{225}{10000}$ ، نظرياً، إذا كانت الشركة T لديها 10000 عقد تنقيب في الجزائر، فسيكون 225 عقد غير قابل للتجديد.

- ما هي نسبة(احتمال) **عدم تجديد عقود** التنقيب في الجزائر لهذه الشركات الأجنبية؟ نحن نبحث على قيمة $p(\overline{M})$ ، وهي معرفة كما يلي:

$$p(\overline{M}) = p\left[\left(\overline{M} \cap T\right) \cup \left(\overline{M} \cap B\right) \cup \left(\overline{M} \cap E\right)\right] \Leftrightarrow$$
$$p(\overline{M}) = p(T) \times p(\overline{M}|T) + p(B) \times p(\overline{M}|B) + p(E) \times p(\overline{M}|E)$$
$$p(\overline{M}) = (0.45 \times 0.05) + (0.35 \times 0.2) + (0.2 \times 0.3) = 0.1525 = \frac{1525}{10000}$$

نقول من بين 10000 عقد تنقيب مع الشركات الأجنبية، هناك 1525 عقد غير قابل للتجديد.

- ما هي نسبة **تجديد عقود** التنقيب عن النفط في الجزائر للشركاء الأجانب؟ الهدف هو حساب قيما الاحتمال $p(M)$ ، وهناك طريقتين، الأولى كما تم حساب احتمال $p(\overline{M})$ والثانية باستعمال خاصية احتمال الحدث العكسي (المتمم).

الطريقة الأولى قيمة $p(M)$ ، وهي معرفة كما يلي

$$p(M) = p\left[\left(M \cap T\right) \cup \left(M \cap B\right) \cup \left(M \cap E\right)\right] \Leftrightarrow$$
$$p(\overline{M}) = p(T) \times p(M|T) + p(B) \times p(M|B) + p(E) \times p(M|E)$$
$$p(\overline{M}) = (0.45 \times 0.95) + (0.35 \times 0.8) + (0.2 \times 0.7) = 0.8475 = \frac{8475}{10000}$$

الطريقة الثانية باستعمال قاعدة احتمال الحدث العكسي، لدينا:

$$p(M) = 1 - p(\overline{M}) = 1 - 0.1525 = 0.8475$$

نقول من بين 10000 عقد تنقيب مع الشركات الأجنبية، هناك 8475 عقد قابل للتجديد.

- إذا ما تم اختيار **عقد تنقيب غير قابل للتجديد** (أي تأكدنا من ذلك) خلال التجربة العشوائية للسحب، ما هو احتمال أن يكون العقد للشركة T؟ أن يكون راجع للشركة E؟ يكفي حساب الاحتمالات الشرطية التالية، $p(T|\overline{M})$ و $p(E|\overline{M})$ ، نستعين بنظرية بايز وقاعدة الاحتمال الكلي لحساب هذه الاحتمالات.

$$p(T|\overline{M}) = \frac{p(T \cap \overline{M})}{p(\overline{M})} = \frac{p(T) \times p(\overline{M}|T)}{p(\overline{M})} = \frac{0.45 \times 0.05}{0.1525} = 0.147541 \quad \checkmark$$

$$p(E|\overline{M}) = \frac{p(E \cap \overline{M})}{p(\overline{M})} = \frac{p(E) \times p(\overline{M}|E)}{p(\overline{M})} = \frac{0.2 \times 0.3}{0.1525} = 0.3934426 \quad \checkmark$$

لشرح النتيجتين، نقول (بالتقريب) من بين 1000 عقد غير قابل للتجديد من طرف وزارة الطاقة في الجزائر للتنقيب عن النفط، هناك 147 عقد يعود للشركة T و 393 عقد يعود للشركة E، إذا اقتصادياً نقول أن الشركة T لها أفضلية وميزة خاصة للمحافظة على حصتها السوقية في التنقيب في الجزائر مقارنة بالشركة E وحتى الشركة B.

9- ملخص لخواص الاحتمال

الجدول (2): يمثل أهم قواعد ومسلمات نظرية الاحتمالات

الخاصية	لغة الحوادث	أجزاء E
$0 < p(A) < 1$	**A** حادثة ممكنة	**A**
$p(\phi) = 0$; $p(E) = 1$	الحادثتان الأكيدة و المستحيلة	ϕ ، **E**
$p(A \cup B) = p(A) + p(B)$	**A** ، **B** غير متلائمتين	$A \cap B = \phi$
$p(\overline{A}) = 1 - p(A)$	$\overline{A}$ الحادثة العكسية للحادثة **A**	$\overline{A}$ (المتممة)
$p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$	**A** و **B** كيفيتان	**A** ، **B**

المصدر: من إعداد الباحث

ثانياً: التحليل العددي : القوائم، التبديلات ، الترتيبات

في العديد من مسائل الإحصاء ، يجب أن ندرج جميع البدائل الممكنة لحل مشكلة ما أو انجاز مهمة، أو على الأقل تحديد عدد الخيارات المختلفة المتوفرة. في هذا الإطار نستخدم غالبًا نظريات الحساب العددي، التي تسمى أحيانًا المبدأ الأساسي للعد، أو قاعدة الحساب للأحداث المركبة، أو قاعدة الخيارات المتعددة. في المراجع بالانجليزية نجد غالبا التسمية : "Combinatorial Methods ". هذا التحليل الهم وشغل بال العديد من علماء الرياضيات لعدة قرون. ووفقًا لTakacs (1982) ، يعود هذا التحليل إلى اليونان القديمة ومع ذلك، فإن الهنود والفرس (بما في ذلك الشاعر والرياضياتي عمر الخيام) و (خاصة) الصينيين درسوا هذه المشاكل أيضًا.

ضمن هذا المحور سنتطرق إلى الحساب العددي ضمن ما يسمى بنظرية المجموعات، سنتعرض أولاً وباختصار إلى أهم التعريفات والمفاهيم، ما هي التوفيقة وكيف نحسب عدد التوفيقات ؟ ما هي الترتيبة وطرق حساب عددها؟ ما هي التبديلة وما هو قانون حساب عدد التبديلات ضمن مشكلة بحثية؟

لتكن Ω مجموعة منتهية ذات n عنصرا ($n \geq 1$)، و p عدد طبيعي ($p \geq 1$)، حيث Ω يمكن أن تكون مجموع طلاب مدرسة، عدد السيارات في الحظيرة، عدد العمال في مصنع...الخ

1- تعريف التوفيقات : Comminations

لتكن المجموعة Ω ذات n عنصرا ($n \geq 1$)،و p عدد طبيعي حيث ($n \geq p \geq 0$)، نسمي **توفيقة** ذات p عنصرا من عناصر Ω كل جزء منها يحتوي على p عنصرا .نرمز غالباً لعدد التوفيقات ذات p عنصرا من مجموعة ذات n عنصرا بالرمز C_n^p أو الرمز $\binom{n}{p}$ ، الذي يسمى معامل ثنائي الحدين." Binomial Coefficient"، وهي معطاة بالعبارة : $C_n^p = \frac{n!}{p!(n-p)!}$

خصائص التوفيقات

عدد التوفيقات: E مجموعة منتهية ذات n عنصرا $(n \geq 1)$ و p عدد طبيعي

- إذا كان $n < p$ فإنه لا توجد أية توفيقة ذات p عنصرا من المجموعة E و منه $C_n^p = 0$
- إذا كان $p = 0$ فإنه توجد مجموعة جزئية وحيدة لا تشمل أي عنصر هي المجموعة الخالية إذن توجد توفيقة وحيدة ذات 0 عنصرا من المجموعة E و منه $C_n^0 = 1$
- إذا كان $p = n$ فإنه توجد مجموعة جزئية وحيدة تشمل n عنصر هي المجموعة E إذن توجد توفيقة وحيدة ذات n عنصرا من المجموعة E و منه $C_n^0 = 1$
- لنفرض الآن أن $n \geq p \geq 1$ و أن X هي إحدى التوفيقات المطلوب حسابها. لدينا $p!$ تبديلة للمجموعة X، و كل تبديلة من هذه التبديلات هي ترتيبة p عنصرا من المجموعة E. إذن لدينا $n! \times C_n^p$ ترتيبة p عنصرا أي:

$$n! \times C_n^p = A_n^p \quad \text{و منه} \quad C_n^p = \frac{A_n^p}{p!}$$

$$C_n^p = \frac{n \times (n-1) \times .... \times (n-p+1)}{p!} \quad \text{أي}$$

- من أجل كل عددين طبيعيين n و p حيث $(n \geq p \geq 0)$ لدينا $C_n^p = C_n^{n-p}$
- من أجل كل عددين طبيعيين n و p حيث $(n-1 \geq p \geq 0)$ لدينا $C_n^p = C_{n-1}^p + C_{n-1}^{p-1}$

أمثلة حول تطبيق التوفيقات

مثال 1: نعتبر، في المستوي، سبع نقاط كل ثلاث منها ليست على استقامة واحدة . عدد المستقيمات المختلفة التي تشمل كل منها نقطتين من هذه النقاط هو عدد توفيقات عنصرين من مجموعة ذات سبعة عناصر ، فهو إذن C_7^2 ولدينا $C_7^2 = \frac{6\times 7}{2!} = 21$

مثال 2: يحتوي كيس على 9 قريصات مرقمة من 1 إلى 9. نسحب من هذا الكيس 4 قريصات في آن واحد لنشكل مجموعة ذات 4 عناصر. عدد الأجزاء المختلفة التي يمكن تكوينها بهذه الكيفية هو عدد توفيقات 4 عناصر من مجموعة ذات 9 عناصر فهو إذن C_9^4 و لدينا $C_9^4 = \frac{6\times 7\times 8\times 9}{4!} = 126$

مثال 3: (مدمج مع الاحتمال الشرطي)

صندوق يحوي 10 قريصات مرقمة من 1 إلى 10 لا نميز بينها عند اللمس . نسحب عشوائيا و في آن واحد قريصتين . ما هو احتمال سحب رقمين فرقهما 4 ؟ احسب الاحتمال الشرطي لكي يكون مجموع الرقمين المسحوبين هو 10 علما أن فرقهما هو 4

الحل

أول خطوة نحدد مجموعة الأساس أو مجموعة الإمكانيات هي مجموعة توفيقات عنصرين من مجموعة القريصات العشر .

عدد هذه التوفيقات هو: $C_{10}^2 = \frac{10\times 9}{2} = 45$

- نسمي A الحادثة " الرقمين المسحوبين فرقهما 4" $A = \{(1,5),(2,6),(3,7),(4,8),(5,9),(6,10)\}$

و عدد إمكاناتها هو 6 إذن: $p(A) = \frac{6}{45} = \frac{2}{15}$

- لتكن B الحادثة " الرقمين المسحوبين مجموعهما 10 " $B = \{(1,9),(2,8),(3,7),(4,6)\}$ ، ونحصل على:

$$p_A(B) = \frac{p(A \cap B)}{p(A)} = \frac{1/45}{6/45} = \frac{1}{6}$$ و منه $A \cap B = \{(3,7)\}$

2- تعريف الترتيبة دون التكرار"Arrangement without repetition"

نسمي ترتيبة p عنصرا من بين n عنصر مكون للمجموعة Ω ، كل قائمة p عنصرا من بين n؛ بحيث تكون هذه العناصر متمايزة عن بعضها البعض. يرمز لعدد الترتيبات دون تكرار ل p عنصرا من بين n بالرمز A_n^p و نكتب:

$$\mathbf{A_n^p = n(n-1)(n-2)\dots(n-p+1) = \frac{n!}{(n-p)!}}$$

أمثلة

- عـدد الأعـداد ذات 3 أرقـام متمـايزة مثـنى مثـنى، و الـتي يمكـن تشـكيلها مـن مجموعـة الأرقـام Ω: $\{1,5,6,7,8,9\}$ هـو عـدد ترتيبـات p=3 عناصـر مـن بـين n=6 عناصـر، أي:$4 \times 5 \times 6$ و هـو 120 عدد ممكن.

- عدد كلمات السر ذات 4 أحرف مختلفة التي يمكن تركيبها من مجموعة الأحرف Ω: $\{a,b,c,d,e,f,g,h\}$، هو عـدد الترتيبـات p=4 حرف من بين n=8 أحرف، وهي: $= A_n^p = A_8^4 = 8 \times 7 \times 6 \times 5 =$ 1680، كلمة.

تحت نفس شروط تعريف الترتيبة دون تكرار، نعرف الترتيبة مع التكرار أو ما تسمى بالقائمة كما يلي:

3- تعريف القائمة (الترتيبة بتكرار) "Arrangement with repetition"

نسمي قائمة ذات p عنصرا من Ω كل متتالية مرتبة من p عنصرا من عناصر Ω . لحساب عدد القوائم K الممكنة من المجموعة Ω ومن اجل كل عدد طبيعي p ($p \geq 1$) نستعمل الصيغة الرياضية التالية:

$$\mathcal{A}_n^p = n^p$$

لأنّـه، لكـل عنصـر مـن عناصـر هـذه القائمـة n إمكانيـة، رياضـيا عـدد القـوائم هـو: $\underbrace{n*n*n*n\dots*n}_{p\text{ مرة}}$، أي n^p

أمثلة

يمكن الاعتماد على نفس أمثلة الترتيبة دون تكرار المبينة أعلاه، لكن مع اختلاف في إمكانية تكرار الأرقام والحروف.

- عدد الأعداد ذات 3 أرقام التي يمكن تشكيلها من مجموعة الأرقام Ω: $\{1,5,6,7,8,9\}$ هو عدد ترتيبات مع وجود تكرار ل p=3 عناصر من بين n=6 عناصر، أي: $\mathcal{A}_{\mathrm{n}}^{\mathrm{p}} = n^p = 6^3 =$ و هو 216 عدد ممكن.
- عدد كلمات السر ذات 4 أحرف التي يمكن تركيبها من مجموعة الأحرف Ω: $\{a,b,c,d,e,f,g,h\}$، هو عدد الترتيبات مع التكرار ل p=4 حرف من بين n=8 أحرف، وهي: $\mathcal{A}_{\mathrm{n}}^{\mathrm{p}} = n^p = 8^4 =$، 4096 كلمة

ملاحظة: دائما عدد الإمكانيات (أو الخيارات) التي تقدمها لنا الترتيبة مع التكرار $\mathcal{A}_{\mathrm{n}}^{\mathrm{p}}$ تكون اكبر من تلك التي توفرها لنا الترتيبة بدون تكرار $\mathrm{A}_{\mathrm{n}}^{\mathrm{p}}$.

4- تعريف التبديلات : Permutations

نسمي تبديلة للمجموعة Ω ذات n عنصرا ($n \geq 1$)، كل ترتيبة n عنصر من جميع عناصر Ω (أي من n عنصر)، عدد عناصر التبديلة معطى بالعلاقة التالية:

$P_{\mathrm{n}}^{\mathrm{n}} = \mathrm{n} \times (\mathrm{n}-1) \times (\mathrm{n}-2) \times \dots \times 2 \times 1 = \mathrm{n}!$، ونقرأ الكتابة n! ب: n عاملي.

خصائص الدالة !n، " n عاملي

هذه الدالة الرياضية لديها خصائص معينة من بينها:

- **الخاصية الأولى:** $\mathbf{1! = 1}$
- **الخاصية الثانية:** $\mathbf{0! = 1}$

ملاحظة: يمكن كتابة عدد الترتيبات ذات p عنصرا من مجموعة ذات n عنصرا بالشكل $\frac{n!}{(n-p)!}$

لأن $$A_n^p = \frac{n(n-1)(n-2)\times....\times(n-p+1)(n-p)!}{(n-p)!} = \frac{n!}{(n-p)!}$$

أمثلة

1) تتكون وحدة إنتاجية من 12 عاملا. يراد تشكيل لجنة تسيير تتألف من رئيس ، كاتب و خازن.

عدد اللجان التي يمكن تشكيلها هو عدد ترتيبات 3 عناصر من مجموعة ذات 12 عنصر فهو إذن $\mathbf{A}_{12}^{3}$ أي 1320

2) عدد الأعداد ذات 4 أرقام متمايزة مثنى مثنى و التي يمكن تشكيلها من الأرقام 1 ، 2 ، 3 ، 4 هو عدد تبديلات ذات 4عناصر أي !4 و هو 24

5- التبديلات الدائرية : Circular Permutations

نسمي تبديلة دائرية للمجموعة Ω ذات n عنصرا ($n \geq 1$)، كل ترتيبة n عنصر من جميع عناصر Ω (أي من n عنصر)، مرتبة في دائرة، و عدد عناصرها مُعطى بالعلاقة التالية:

$$P_n = \frac{n!}{n} = (n-1)! = (n-1)\times(n-2)\times ...\times 2\times 1$$

الاختلاف الجوهري بين التبديلة العادية والتبديلة الدائرية، أن في هذه الأخيرة لا تُوجد نقطة مرجعية (أو أساس) ننطلق من خلاله في ترتيب عناصر مجموعة الأساس.

مثال

في اجتماع حول طاولة مستديرة، حضرها 10 أشخاص، بكم طريقة يمكن لهم الجلوس حول هذه الطاولة؟

الحل : لدينا $n=10$، ومكان جلوس الأشخاص هو "طاولة مستديرة"، إذا لحساب عدد الطرق الممكنة لجلوسهم نستعمل التبديلة الدائرية، $p_n=(n-1)!=(10-1)!=9!$ ، ويساوي 362880 طريق ممكنة للجلوس.

6- التبديلة بعناصر متمايزة (Permutation With Distinctive Elements)

أحيانا يمكن تجزئة المجموعة Ω ذات n عنصرا ($n \geq 1$)، إلى k جزء (أو مجموعات جزئية) متمايزة فيما بينها، عدد عناصر كل مجموعة هو $(n_1, n_2, ..., n_k)$ ويكون $\sum_{k=1}^{k} n_k = n$ ، في هذه الحالة عدد عناصر الترتيبات الممكنة ل n عنصرا ($n \geq 1$) تُحسب بالعلاقة التالية: $P_n^{n_1, n_2, ..., n_k} = \frac{n!}{n_1!\, n_2!... \, n_k!}$

مثال

في إطار التدريس عن بعد، يريد أستاذ الإحصاء إعطاء رقم تسجيل سري لكل طالب للولوج إلى المنصة التعليمية، الأستاذ له إمكانية تشكيل الأرقام السرية المكونة فقط من العبارة: JJIIJJELLL، المطلوب، كم رقم سري يمكن أن يشكله الأستاذ؟

الحل

عدد أحرف الكلمة $n=10$، وعدد المرات التي تكرر فيها الحرف J هو 4، أي $n_1=4$، وعدد المرات التي تكرر فيها الحرف L هو 3، أي $n_2=3$، وعدد المرات التي تكرر فيها الحرف I هو 2، أي $n_3=2$، وعدد المرات التي تكرر فيها الحرف E هو 1، أي $n_4=1$

$$P_n^{n_1,n_2,n_3,n_4} = \frac{n!}{n_1!\,n_2!\,n_3\,n_4!} = \frac{10\ !}{4!3!2!1!} = \frac{3628800}{288} = 12600$$

إذا يمكن للأستاذ أن يشكل 12600 كلمة سر مختلفة.

ملاحظة بالنسبة إلى الأمثلة المتعلقة بسحب p ورقة من كيس يحتوي n ورقة توجد عدة حالات للسحب نلخصها في الجدول التالي:

الجدول (3): ملخص لحالات استعمال الطرق التركيبية في حال السحب العشوائي

السحب	على التوالي	في آن واحد
تعاد الورقة إلى الكيس قبل السحب الموالي	n^p (قائمة)	----
لا تعاد الورقة إلى الكيس	A_n^p (ترتيبة)	C_n^p (توفيقة)

المصدر: من إعداد الباحث

الفصل الثاني

المتغير العشوائي والتوزيع الاحتمالي

1- المتغير العشوائي

المتغير العشوائي X هو دالة عددية مُعرّفة على مجموعة الأساس E، هذه الدالة تَرفق كل نتيجة من النتائج الممكنة (كل عنصر من عناصر مجموعة الأساس) بعدد حقيقي، وحسب طبيعة الظاهرة المدروسة يمكن أن نصنف المتغيرات العشوائية إلى صنفين: متغير عشوائي منفصل (متقطع) ومتغير متصل (مستمر). و تكون مزودة باحتمال P، و X يأخذ القيم $x_1,x_2,....,x_n$ بالاحتمالات $p_1,p_2,....,p_n$ معرف كما يلي $p_i = p(X = x_i)$.

عملية إرفاق القيم الاحتمالية p_i بقيم المتغير x_i هو تعريف **قانون احتمال** جديد على E' هذا القانون يرمز له بـ P' أو P_x و يسمى قانون X .

درسنا في مقياس الإحصاء الوصفي أنواع المتغيرات الإحصائية، وذكرنا أنها تنقسم أساسا إلى متغيرات عشوائية منفصلة (متقطعة) ومتغيرات عشوائية متصلة (مستمرة)، وكل نوع له تحليل إحصائي خاص به من حيث شكل الدالة الرياضية للمتغير (هنا نستعمل قانون الاحتمال) وكذا التمثيلات البيانية لنمط توزيع قيم المتغير، هذا التقسيم مهم جدا وأساسي في هذا المستوى من الدراسة، نبدأ أولا بدراسة المتغير العشوائي المنفصل ثم المتغير العشوائي المتصل.

2- التوزيع الاحتمالي والتراكمي للمتغير العشوائي المنفصل

عندما يكون عدد مخارج تجربة عشوائية منتهيا ، نعرّف على مجموعة المخارج $E = \{x_1,x_2,....,x_r\}$ ، قانون احتمال و ذلك بإعطاء متتالية أعداد $(p_1,p_2,....,p_r)$ تحقق

$$(r \geq i \geq 1) \quad i \text{ من أجل كل} \quad p_i \geq 0 \text{ و } \sum_{i=1}^{r} p_i = 1$$

هذه المساواة مهمة جداً (وهي احد مسلمات نظرية الاحتمالات كما وضعها الرياضي الروسي كولموغروف)، وهي كذلك تشبه مساواة مجموع التكرارات النسبية التي تطرقنا إليها في الإحصاء الوصفي. يبقى أن نذكر أن كل الاحتمالات المحسوبة هنا هي في إطار ما سميناه الاحتمال النظري.

مثال1 : كتجربة عشوائية نرمي زهرة نرد أوجهها مرقمة من 1 إلى 6، ولتكن هذه الأرقام هي قيم المتغير العشوائي X ، نريد معرفة احتمال كل قيمة من هذه القيم والتأكد من أن هذه التجربة العشوائية تحقق شروط التوزيع الاحتمالي (قانون الاحتمال) في مجموعة الأساس Ω: $\{1,2,3,4,5,6\}$

الوصول إلى هذا الهدف يرتبط أساسا بخاصية احتمال **الأحداث المنتظمة** التي تطرقنا إليها في الفصل الأول من هذه المطبوعة، هذه الخاصية تكون مُحققّة في حالة تساوي الاحتمالات p_i ، ونقول حينها أن قانون الاحتمال متساوي التوزيع (أو نقول تساوي الاحتمال)، أي من أجل كل i لدينا $p(x_i) = p_i = \frac{1}{r}$

الإجابة على التطبيق ملخصة في الجدول التالي:

الجدول (4): جدول التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي

النتيجة x_i	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	$\sum_{i=1}^{n=6} p_i$
الاحتمال p_i	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	**1**

المصدر: من إعداد الباحث

لدينا الاحتمالات كلها متساوية، أي $p(x_i) = p_i = \frac{1}{r} = 1/6$ ، ومجموع الاحتمالات يساوي **1**، وكلها محصورة في المجال $[0,1]$، إذا التوزيع الاحتمالي لقيم المتغير X هو توزيع احتمالي. إذا ما طُلب منك **التمثيل**

البياني لهذا التوزيع الاحتمالي، يا ترى كيف يكون شكل التمثيل ؟ هنا الإجابة ستكون باستعمال الأعمدة البيانية كما رأينا ذلك في الإحصاء الوصفي.

2-1- دالة التوزيع الاحتمالية (التراكمية) :(Distribution Probability Function)

دالة التوزيع الاحتمالية F(x) للمتغير العشوائي X هي الدالة الرياضية المتعلقة بالتطبيق الاحتمالي P(x) ومعرفة كما يلي:

$$F(x) = P(X \le x) = \sum_{i:x_i<x} P(X = x_i)$$

وهي تطابق في عملية حسابها التكرار التجميعي الصاعد الذي درسناه في الإحصاء الوصفي.وتُعطى في الحل التطبيقي للمسائل الاحتمالية بالطريقة الآتية،

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < x_1 \ (min\, x) \\ p_1 & x_1 \le x < x_2 \\ p_1+p_2 & x_2 \le x < x_3 \\ \vdots & \vdots \\ p_1+p_2+p_3+\cdots+p_{m-1} & x_{m-1} \le x < x_m \\ 1 & x \ge x_m \end{cases}$$

تمثيلها البياني يكون على شكل منحنى تصاعدي متقطع (على شكل سُلمي)، كما هو الحال مع منحى التكرار التجميعي الصاعد $\boldsymbol{F_i^{\uparrow}}$.

مثال2

مندوب مبيعات شركة تجارية لديه اجتماع لعقد 3 صفقات مع 3 متعاملين. استنادًا إلى خبرته السابقة، يعرف مندوب المبيعات أن هناك فرصة بنسبة 80٪ لنجاح كل صفقة. المطلوب هو تحديد التوزيع الاحتمالي لعدد الصفقات الناجحة التي سيقوم بإبرامها مندوب المبيعات مع هؤلاء المتعاملين؟

الحل

لدى المندوب التجاري مهمة التفاوض على إبرام ثلاث صفقات $C_1;C_2;C_3$. **أولاً**، لنرمز للحدث العشوائي : "**إبرام الصفقة** " بالرمز S، وبالرمز $\overline{S}$ للحدث العكسي وهو : "**فشل إبرام الصفقة**". **ثانياً**، نحن نهتم بالمتغير العشوائي X الذي يمثل عدد الصفقات الناجحة التي يمكن لمندوب الشركة إبرامها مع المتعاملين الثلاثة. **ثالثاً**، وتبعاً لمعطيات التمرين، هناك 20% كنسبة تمثل فشل الصفقة، إذا المندوب له خيارات أربع، وهي إمكانية أن يبرم: 3 صفقات، صفقتين، صفقة واحدة، 0 صفقة. هذه الإمكانات تمثل مجال قيم المتغير X ، إذا مجموعة الأساس لهذا المتغير هي: $\Omega_X = \{0,1,2,3\}$.

الجدول (5): جدول التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي

x_i **عدد الصفقات**	0	1	2	3	$\sum_{i=0}^{n=3} p_i$
p_i **الاحتمال**	0.008	0.096	0.384	0.512	1

المصدر: من إعداد الباحث

هدفنا من المثال هو تحديد التوزيع الاحتمالي للمتغير X ، وما علينا إلا حساب الاحتمالات المقابلة لقيم المتغير العشوائي X .ننطلق من فرضية مصرح بها وهي استقلالية الأحداث العشوائية لعقد الصفقة، أي عقد الصفقة مع المتعامل الأول أو عدم عقدها لا يؤثر ولا يتأثر بنتيجة التفاوض مع المتعاملين الآخرين. نبدأ بحساب الاحتمالات كما يلي:

- احتمال أن لا يُبرم المندوب أي صفقة، ويطابق رياضياً $P(X=0)$ ، وهذا الحدث العشوائي يقابل: فشل في الصفقة الأولى **و** فشل في الصفقة الثانية **و** فشل في الصفقة الثالثة، باستعمال الرموز المبينة أعلاه نكتب:

$\overline{S_1} \cap \overline{S_2} \cap \overline{S_3}$ ، وذكرنا الاستقلالية بين الصفقات،وانّ احتمال فشل الصفقة هو 0.2، ومنه:

$$P(X=0) = P(\overline{S_1} \cap \overline{S_2} \cap \overline{S_3}) = P(\overline{S_1}) + P(\overline{S_2}) + P(\overline{S_3}) = 0.2 \times 0.2 \times 0.2 = 0.008$$

- احتمال أن يُبرم المندوب صفقة واحدة، ويطابق رياضياً $P(X=1)$ ، وهذا الحدث العشوائي مركب من ثلاثة أحداث عشوائية ممكنة ويقابل:
  - نجاح في الصفقة الأولى **و** فشل في الصفقة الثانية **و** فشل في الصفقة الثالثة، **أو**
  - فشل في الصفقة الأولى **و** نجاح في الصفقة الثانية **و** فشل في الصفقة الثالثة، **أو**
  - فشل في الصفقة الأولى **و** فشل في الصفقة الثانية **و** نجاح في الصفقة الثالثة

باستعمال الرموز، هذا يقابل: $(S_1 \cap \overline{S_2} \cap \overline{S_3}) + (\overline{S_1} \cap S_2 \cap \overline{S_3}) + (\overline{S_1} \cap \overline{S_2} \cap S_3)$ ، وبما أن الأحداث كلها مستقلة فان الاحتمال هو:

$$P(X=1) = P\left((S_1 \cap \overline{S_2} \cap \overline{S_3}) + (\overline{S_1} \cap S_2 \cap \overline{S_3}) + (\overline{S_1} \cap \overline{S_2} \cap S_3)\right)$$
$$P(X=1) = P\left(S_1 \cap \overline{S_2} \cap \overline{S_3}\right) + P\left(\overline{S_1} \cap S_2 \cap \overline{S_3}\right) + P\left(\overline{S_1} \cap \overline{S_2} \cap S_3\right)$$
$$P(X=1) = P(S_1)P\left(\overline{S_2}\right)P\left(\overline{S_3}\right) + P\left(\overline{S_1}\right)P(S_2)P\left(\overline{S_3}\right) + P\left(\overline{S_1}\right)P\left(\overline{S_2}\right)P(S_3)$$
$$P(X=1) = (0.8)(0.2)(0.2) + (0.2)(0.8)(0.2) + (0.2)(0.2)(0.8) = 0.096$$

- احتمال أن يُبرم المندوب صفقتين، ويطابق رياضياً $P(X=2)$ ، وهذا الحدث العشوائي مركب من ثلاثة أحداث عشوائية ممكنة ويقابل:
  - نجاح في الصفقة الأولى **و** نجاح في الصفقة الثانية **و** فشل في الصفقة الثالثة، **أو**
  - فشل في الصفقة الأولى **و** نجاح في الصفقة الثانية **و** نجاح في الصفقة الثالثة، **أو**
  - نجاح في الصفقة الأولى **و** فشل في الصفقة الثانية **و** نجاح في الصفقة الثالثة

باستعمال الرموز، هذا يقابل: $(S_1 \cap S_2 \cap \overline{S_3}) + (\overline{S_1} \cap S_2 \cap S_3) + (S_1 \cap \overline{S_2} \cap S_3)$ ، وبما أن الأحداث كلها مستقلة فان الاحتمال هو:

$$P(X=2) = P\left((S_1 \cap S_2 \cap \overline{S_3}) + (\overline{S_1} \cap S_2 \cap S_3) + (S_1 \cap \overline{S_2} \cap S_3)\right)$$
$$P(X=2) = P\left((S_1 \cap S_2 \cap \overline{S_3})\right) + P\left(\overline{S_1} \cap S_2 \cap S_3\right) + P\left(S_1 \cap \overline{S_2} \cap S_3\right)$$
$$P(X=2) = P(S_1)P(S_2)P\left(\overline{S_3}\right) + P\left(\overline{S_1}\right)P(S_2)P(S_3) + P(S_1)P\left(\overline{S_2}\right)P(S_3)$$
$$P(X=2) = (0.8)(0.8)(0.2) + (0.2)(0.8)(0.8) + (0.8)(0.2)(0.8) = 0.384$$

- احتمال أن **يُبرم** المندوب كل الصفقات، ويطابق رياضياً $P(X=3)$ ، وهذا الحدث العشوائي يقابل: نجاح في الصفقة الأولى **و** نجاح في الصفقة الثانية **و** نجاح في الصفقة الثالثة، باستعمال الرموز المبينة أعلاه نكتب: $S_1 \cap S_2 \cap S_3$ ، ومنه الاحتمال المقابل هو:

$$P(X=0) = P(S_1 \cap S_2 \cap S_3) = P(S_1)P(S_2)P(S_3) = 0.8 \times 0.8 \times 0.8 = 0.512 .$$

من خلال نتائج حساب الاحتمالات، وجدنا أن كل هذه الاحتمالات تحقق الشرط $P(X=x) \geq 0$ ، وكذلك مجموعها يحقق الشرط $\sum_{\Omega_X} P(X=x) = 1$. (انظر الجدول 5).

مثال 3 دراسة ديموغرافية تهتم بتوزيع الأطفال حسب الجنس (ذكر –أنثى) في اسر بلدية سطيف التي لا يتجاوز عدد أطفالها 2. ليكن المتغير العشوائي X **يمثل عدد الذكور**(نهتم بعدد الذكور في كل أسرة وترتيبها أيضا، أي الذكر هو المولود الأول ، الثاني)، نختار أسرة بطريقة عشوائية ونحاول حساب احتمال عدد الذكور في هذه الأسرة. المطلوب: ما هي الأحداث الممكنة لهذه التجربة العشوائية؟ حدد قيم مجال المتغير X ؟ أنشئ جدول التوزيع الاحتمالي؟ وكذا دالة التوزيع الاحتمالي ومثلها بيانياً؟

الحل النموذجي

- المتغير العشوائي X : يمثل عدد الذكور في الأسرة. نرمز للذكر ب B وللأنثى ب G الأحداث الممكنة لهذه التجربة العشوائية (نأخذ بعين الاعتبار ترتيب المولود) هي كالتالي:

$$\Omega_X : \{(BB),(BG),(GB),(GG)\}$$

- والمتغير العشوائي X يأخذ الصيغة التالية (أي مُعّرف)

$$X = X(\omega_x) = \begin{cases} 0 & \omega_x : \{GG\} \\ 1 & \omega_x : \{GB, BG\} \\ 2 & \omega_x : \{BB\} \end{cases}$$

ومنه مجال قيم المتغير X هو $X : \{0,1,2\}$

- انطلاقاً من هذا المجال يمكننا بناء جدول التوزيع الاحتمالي لهذا المتغير بحساب الاحتمالات المقابلة لكل قيمة من قيم المتغير X .

الجدول (6): جدول التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي

عدد الذكور x_i	**0**	**1**	**2**	$\sum_{i=0}^{n=2} p_i$
الاحتمال p_i	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	**1**

المصدر: من إعداد الباحث

2-2- حساب دالة التوزيع الاحتمالية وتمثيلها البياني

أولا لحساب دالة التوزيع الاحتمالية $F(x)$ ، يكفي حساب الاحتمالات المقابلة للأحداث العشوائية التالية:

- $P(X<0)$ ، هو احتمال مقابل لحدث عشوائي مستحيل الحدوث، لانّ من غير المنطقي أن يكون عدد الذكور اقل من الصفر، لهذا احتمال هذا الحدث العشوائي يساوي الصفر $P(X<0)=0$.

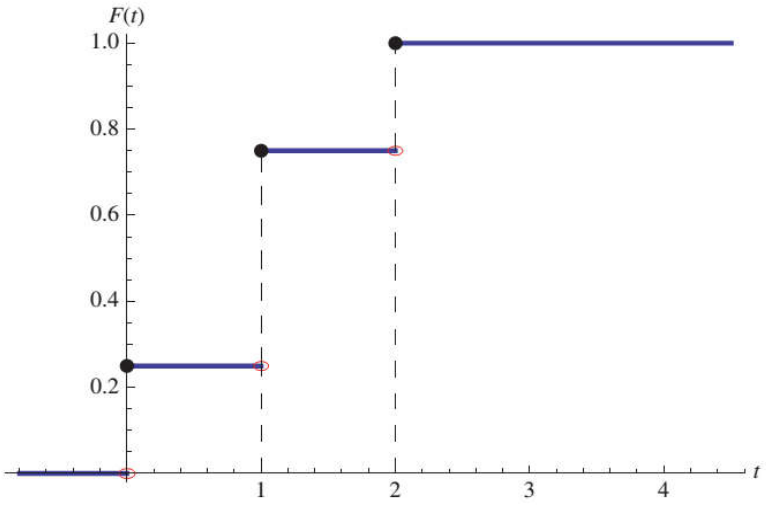
- الحدث العشوائي حتى يكون عدد الذكور في الأسرة يساوي الصفر واقل تماما من الواحد، يطابق $P(0\le X<1)=p(X=0)=\frac{1}{4}$ ، وهو يقابل الأحداث $\{GG\}$.

$$F(X)=\mathrm{P(X\le x)}=\begin{cases}0 & x<0\\ \frac{1}{4} & 0\le x<1\\ \frac{3}{4} & 0\le x<2\\ 1 & x\ge 2\end{cases}$$

- الحدث العشوائي حتى يكون عدد الذكور في الأسرة على الأكثر يساوي واحد، يطابق الأحداث: أن يكون في الأسرة ذكر واحد أو ليس لها على الإطلاق، أي، $P(X\le 1)=p(X=0)+P(X=1)$ ، وهو يقابل الأحداث $\{(BG),(GB),(GG)\}$ ومنه الاحتمال هو: $P(X\le 1)=\frac{1}{4}+\frac{2}{4}=\frac{3}{4}$.

- الحدث العشوائي حتى يكون عدد الذكور في الأسرة على الأكثر يساوي اثنان، يطابق الأحداث: أن يكون في الأسرة ذكرين أو ذكر واحد أو ليس لها على الإطلاق: $P(0<X\le 2)=p(X=0)+P(X=1)+P(X=2)$

وهو يقابل الأحداث $\{(BG),(GB),(BB),(GG)\}$ ، والتي تقابل مجموعة الأساس ومنه الاحتمال هو $P(0<X\le 2)=\frac{1}{4}+\frac{2}{4}+\frac{1}{4}=1$. كل هذه الاحتمالات مرتبة ومجتمعة تشكل دالة التوزيع الاحتمالية.



الشكل(4): دالة التوزيع الاحتمالية للمتغير العشوائي "عدد الذكور في الأسرة"

3- التوزيع الاحتمالي والتراكمي للمتغير العشوائي المتصل

درسنا في الإحصاء الوصفي أن المتغيِّر العشوائي المتصل يأخذ عددًا لا نهائيًّا من قيم الأعداد الحقيقية في سلسلة متصلة مثل: الأوزان، الأطوال، المساحات، المسافات...، وتحت هذا النوع من المتغيرات، نجد (رياضيا) أن احتمال أخذ متغيِّر عشوائي متصل لقيمة معيَّنة يساوي صفرًا؛ أي إنّ

$$P(X = x) = 0, \forall x \in \Omega$$

وهذه إحدى الخواص التي تُميز المتغيِّرات العشوائية المتصلة عن المتغيِّرات المنفصلة .لماذا يا ترى هذه المساواة ؟ السبب هو التعريف الخاص بدالة الكثافة الاحتمالية(تحت قواعد التكامل الرياضي) للمتغير العشوائي المتصل.

دالة الكثافة الاحتمالية :(**Probability Density Function**) : هي الدالة الممثلة لأي توزيع احتمالي عن طريق التكامل. وتكون دالة الكثافة الاحتمالية موجبة دائمًا، كما يكون تكاملها من ∞- إلى ∞+ (أو ضمن مجال قيم المتغير العشوائي المتصل) مساويًا للواحد،

- $f(x) \geq 0$
- $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$

دالة التوزيع الاحتمالية (التراكمية): (Distribution Function)

دالة التوزيع الاحتمالية F(x) للمتغير العشوائي X هي الدالة الرياضية المتعلقة بالتطبيق الاحتمالي P(x) ومعرفة كما يلي:

$$F(x) = P(X \leq x) = P_x(]-\infty, x]$$
$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx.$$

علاقة مهمة جداً بين دالة التوزيع ودالة الكثافة الاحتمالية، مُشتقة الدالة F(x) هي f(x)، $F(x)' = f(x)$

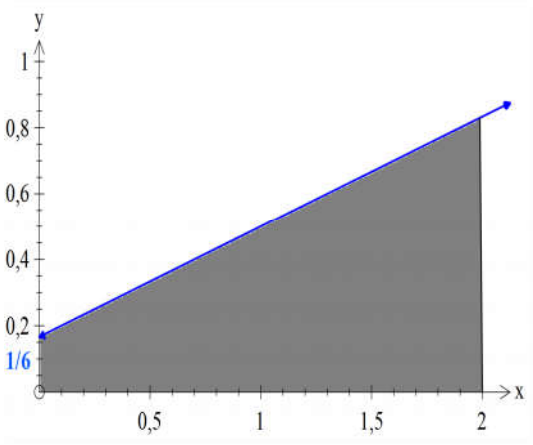
خصائص دالة التوزيع الاحتمالية

- هي دالة متزايدة على مجال قيم المتغير X
- دالة مستمرة على اليمين (في مجال X)
- النهايات آلاتية محققة، $\lim_{x\to-\infty} F(x) = 0; \lim_{x\to+\infty} F(x) = 1;$
- $P(a < x \leq b) = \int_{a}^{b} f(x)dx.$
- $P(a < x \leq b) = P(a \leq x \leq b) = P(a < x < b) = P(a \leq x < b)$
- $P(X = a) = 0, \forall a \in \Omega_X$
- $P(X > a) = \int_{a}^{+\infty} f(x)dx = .$
- باستعمال خاصية الحدث العكسي، $P(X > a) = 1 - P(X < a) = \int_{-\infty}^{a} f(x)dx.$

يتميَّز المتغيِّر العشوائي المتصل بدالة كثافة الاحتمال، وهي دالة غير سالبة، مساحتها الكلية الموجودة أسفل المنحنى تساوي واحدًا. تمثِّل المساحة الموجودة أسفل منحنى دالة كثافة الاحتمال، وهي احتمال فضاء العيِّنة كاملًا. نحن نتذكَّر قاعدة الاحتمال، التي تنص على أن مجموع احتمالات الأحداث المتنافية يساوي واحدًا. إذا طبقًا لهذه القاعدة، فإن المساحة الكلية أسفل المنحنى تساوي واحدًا.

تمرين : (حساب الاحتمال لمتغيِّر عشوائي متصل باستخدام التمثيلات البيانية)

- إذا كانت لدينا دالة الكثافة الاحتمالية $f(x)$ معرفة بالشكل المقابل، حيث قيم المتغير $0 \le x \le 2$، المطلوب هو:
- ما نوع المتغير العشوائي؟ اوجد الصيغة الرياضية لدالة الكثافة الاحتمالية $f(x)$



الإجابة

بما أن المتغير العشوائي x يأخذ قيم في مجال متصل $0 \le x \le 2$ لمجموعة الأعداد الحقيقية، فهو متغير كمي متصل. فيما يخص صيغة الدالة الرياضية، الشكل الهندسي (باللون الرمادي)، المحدود في المجال $0 \le x \le 2$، والقطعة المستقيمة التي تشمل الإحداثية $(x = 0, y = 1/6)$ هو شبه منحرف، ودالة الكثافة ما هي إلا المساحة الملونة لشبه المنحرف، إذا يكفي لتحديد العبارة الرياضية للدالة $f(x)$، أن نضع قاعدة حساب مساحة شبه المنحرف، وهي:

$$f(x) = \text{المساحة} = \frac{(\text{القاعدة الصغرى} + \text{القاعدة الكبرى})}{2} \times \text{الارتفاع}$$

من الشكل البياني، لدينا القاعدة الصغرى هي $\frac{1}{6}$، القاعدة الكبرى مجهولة ولنضعها x والارتفاع يساوي 2،

وتحت شرط أساسي وهو أن المساحة تحت المنحنى يجب أن تكون مساوية للواحد الصحيح، إذا

$$\frac{5}{6} = x \Leftarrow {}^1\!/_6 + x = 2 \times \frac{\left({}^1\!/_6 + x\right)}{2} = 1 = \text{المساحة}$$

القاعدة الكبرى تساوي ${}^5\!/_6$، وهي رياضياً تمثل صورة العدد 2، أي : $f(2) = {}^5\!/_6$ ، ولدينا أيضا

$f(0) = {}^1\!/_6$ ، يكفي أن نضع جملة معادلتين للوصول إلى صيغة دالة الكثافة الاحتمالية $f(x)$

$$f(0) = {}^1\!/_6 \Rightarrow a(0) + b = {}^1\!/_6 \Rightarrow b = {}^1\!/_6$$
$$f(2) = {}^5\!/_6 \Rightarrow a(2) + {}^1\!/_6 = {}^5\!/_6 \Rightarrow a = {}^1\!/_3$$

ومنه دالة الكثافة الاحتمالية $f(x) = \frac{1}{6} + \frac{x}{3}; \forall x \in 0 \le x \le 2$.

الطريقة الثانية:(الطريقة التحليلية)

نلاحظ أن التمثيل البياني عبارة عن خط مستقيم، وعليه فالدالة تآلفية من الدرجة الأولى، تأخذ الشكل الرياضي

التالي: $f(x) = ax + b$. ومن خلال الشكل نجد أن: $f(0) = {}^1\!/_6 \Rightarrow a(0) + b = {}^1\!/_6 \Rightarrow b = {}^1\!/_6$

نقوم بإيجاد قيمة a حتى تكون $f(x)$ دالة كثافة احتمالية، وحتى تكون كذلك يجب توفر شرطين أساسيين هما

$f(x) \ge 0$ و $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$ ، نطبق الشرطين ونتبع الخطوات:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) = 1 \Leftrightarrow \int_{-\infty}^{0} f(x)\,dx + \int_{0}^{2} f(x)\,dx + \int_{2}^{+\infty} f(x)\,dx = 1$$

$$\Leftrightarrow \int_{-\infty}^{0} (0)\,dx + \int_{0}^{2} \left(ax + \frac{1}{6}\right)\,dx + \int_{2}^{+\infty} (0)\,dx = 1$$

$$\Leftrightarrow \quad 0 \quad + \left[\frac{a}{2}x^2 + \frac{1}{6}x\right]_0^2 + \quad 0 \quad = 1$$

$$\Leftrightarrow\ a = \frac{1}{3}$$

أي أن: $f(x) = \frac{1}{3}x + \frac{1}{6}$، ولدينا من جهة أخرى $f(x) \geq 0$ ، وبالتالي فإن $f(x)$ هي فعلا دالة كثافة احتمالية.

4- معالم المتغير العشوائي: الأمل الرياضي والتباين

الأمل الرياضي لمتغير عشوائي X هو الأمل الرياضي لقانون احتماله P_x و كذلك التباين و الانحراف المعياري ونرمز لها على الترتيب بالرموز $E(X)$ ، $Var(X)$ ، $\sigma(X)$. سنتطرق باختصار إلى تعريف هذه المعالم وطرق حسابها وخصائصها في حال المتغير العشوائي المنفصل والمتغير العشوائي المتصل.

4-1- الأمل الرياضي والتباين للتوزيع الاحتمالي المنفصل

الأمل الرياضي (التوقع) هو ناتج مجموع جداء قيمة كل متغير x_i في احتماله p_i. في بعض المراجع يُعّرف أيضاً بالقيمة المتوقعة للمتغير العشوائي المنفصل $E(X)$ أو التوقع الرياضي Mathematical Expectation

أي أنَّ:

$$E(X) = x_1 p(x_1) + x_2 p(x_2) + \ldots + x_n p(x_n)$$

$$E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i p(x_i); i = 1,2,3,\ldots,n$$

وهو يقابل **الوسط الحسابي** $\overline{X}$ الذي تطرقنا إليه في الإحصاء الوصفي، وعرفناه على انّه مُعطى بالصيغة التالية (في حال وجود تكرارات نسبية في الجدول الإحصائي)، $\overline{X} = \sum_{i=1}^{n} x_i f_i ; i = 1,2,3,...,n$

التباين والانحراف المعياري(Variance and Standard Deviation)

درسنا التباين $V(X)$ في الإحصاء الوصفي وقلنا انّه احد أهم مقاييس التشتت، وذكرنا أن له صيغتين لحسابه، الصيغة الأولية لحسابه هي

$$V(X) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{X})^2 f_i$$

بتعويض $\overline{X}$ ب $E(X)$ وتعويض f_i ب $p(x_i)$ نحصل على عبارة التباين للتوزيع الاحتمالي المنفصل

$$V(X) = E(X - E(x))^2 = \sum_{i=1}^{n} (x_i - E(x))^2 p_i \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

يمكن حسابه أيضا عن طريق نشر العبارة في الأعلى ونحصل على صيغة مبسطة

$$V(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 p_i - E(X)^2 = E(X^2) - E(X)^2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

يبقى الانحراف المعياري (Standard deviation) للمتغير العشوائي المنفصل فما هو إلا الجذر ألتربيعي لقيمة التباين كما رأيناه أيضا في الإحصاء الوصفي، أي: $\sigma = \sqrt{V(x)}$

مثال تطبيقي

ليكن التوزيع الاحتمالي لمتغير عشوائي X يمثل عدد حوادث السيارات في اليوم في ولاية جيجل، الجزائر، واحتمالاتها المقابلة لها، المطلوب هو حساب **متوسط عدد الحوادث المتوقع** خلال الأيام القادمة، وكذا **التباين والانحراف المعياري** للحوادث في الولاية؟

الجدول (7) يوضح حساب احتمالات عدد حوادث المرور وعناصر حساب معالم التوزيع الاحتمالي للمتغير x

عدد الحوادث x	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	$\sum_{i=i}^{n=6} p_i$
الاحتمال $p(x)$	$\frac{1}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{2}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{2}{10}$	$\frac{1}{10}$	**1**
$x \times p(x)$	**0**	**0.3**	**0.4**	**0.3**	**0.8**	**0.5**	**2.3**
$x^2 \times p(x)$	**0**	**0.3**	**0.8**	**0.9**	**3.2**	**2.5**	**7.7**

المصدر: من إعداد الباحث

الإجابة

- متوسط عدد الحوادث(أي الأمل الرياضي)، باستعمال الصيغة في الأعلى هو، مجموع جداء عدد الحوادث x في الاحتمال المقابل لها، أي:

$$E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i p(x_i) = 0 \times \frac{1}{10} + 1 \times \frac{3}{10} + 2 \times \frac{2}{10} + 3 \times \frac{1}{10} + 4 \times \frac{2}{10} + 5 \times \frac{1}{10} = 2.3$$

إذا نتوقع بالمتوسط أن عدد الحوادث في ولاية جيجل سيكون 2 حوادث (بالتقريب إلى العدد الصحيح).

- التباين والانحراف المعياري، يكفي استعمال الصيغة الثانية، ونحسب فقط القيمة $\sum_i x_i^2 p_i$، للقيام بذلك يكفي تربيع قيمة x_i وضربها في الاحتمال المقابل لها (انظر السطر الأخير في الجدول)، بعد الحساب حصلنا على $\sum_i x_i^2 p_i = 7.7$. وبما أن الأمل الرياضي تم حسابه، إذا التباين $V(x) = 7.7 - (2.3)^2 = 2.41$

التباين ليس له وحدة قياس، إذا لقياس مستوى تشتت ظاهرة حوادث المرور في الولاية، نعتمد على الانحراف المعياري . $\sigma(x) = \sqrt{V(x)} = \sqrt{2.41} = 1.55$

4-2- الأمل الرياضي والتباين للتوزيع الاحتمالي المتصل

تبقى التعريفات المذكورة سابقاً للأمل الرياضي والتباين والانحراف المعياري صحيحة كذلك في حال التوزيع الاحتمالي المتصل، هناك فرق فقط في طريقة الحساب لاختلاف بنية البيانات وخاصية المتغير الكمي المتصل. هنا سنعمل على مجالات متصلة (لمجموعة الأعداد الحقيقية $\mathbb{R}$ أو المركبة $\mathbb{C}$).

- الأمل الرياضي $E(x)$ سيُحسب باستعمال التكامل على مجال تعريف المتغير X، ويُعطى بالعبارة التالية

$$E(x) = \int_{\Omega_x} xf(x)dx$$

- التباين ذكرنا انه $V(X) = E(X^2) - E(X)^2$، إذا يكفي (وبعد حساب الأمل الرياضي) أن نحسب قيمة $E(X^2)$، وهو مُعطى أيضا بنفس شكل عبارة الأمل الرياضي،

$$E(X^2) = \int_{\Omega_x} x^2 f(x)dx$$

عند الانتهاء من حساب قيمة الأمل الرياضي وقيمة $E(X^2)$ (الذي يُسمى بالعزم من الدرجة 2) نعوضهما في عبارة التباين لحساب قيمته.

مثال

باستعمال معطيات التمرين في الصفحة 34، وجدنا أن دالة التوزيع الاحتمالية الممثلة للشكل البياني (شبه المحترف)، $f(x) = \frac{1}{6} + \frac{x}{3}; \forall x \in 0 \le x \le 2$، احسب الأمل الرياضي والتباين لهذه الدالة؟

- **حساب الأمل الرياضي** $E(x)$

$$E(x)=\int_0^2 xf(x)dx=\int_0^2 x(\frac{1}{6}+\frac{x}{3})dx=\int_0^2 (x\frac{1}{6}+\frac{x^2}{3})dx$$

الدالة الأصلية للدالة $(\frac{x}{6}+\frac{x^2}{3})$هي الدالة $(\frac{x^2}{12}+\frac{x^3}{9})$، ومنه يمكن التعويض في مجال قيم المتغير للحصول على قيمة التكامل (والذي يمثل الأمل الرياضي)

$$E(x)=(2^2\frac{1}{12}+\frac{2^3}{9})-(0^2\frac{1}{12}+\frac{0^3}{9})=\frac{44}{36}\approx 1.22$$

- **حساب التباين** $V(x)$

التباين كما عرفناه سابقاً هو الفرق بين الأمل الرياضي ل $E(X^2)$ ومربع الأمل الرياضي ل X ، أي $E(x)$ ، يكفي إذا حساب $E(X^2)$ وهي معطاة بالتكامل التالي

$$E(x^2)=\int_0^2 x^2 f(x)dx=\int_0^2 x^2(\frac{1}{6}+\frac{x}{3})dx=\int_0^2 (\frac{x^2}{6}+\frac{x^3}{3})dx$$

الدالة الأصلية للدالة $(x^2\frac{1}{6}+\frac{x^3}{3})$ هي الدالة $(\frac{x^3}{18}+\frac{x^4}{12})$، ومنه يمكن التعويض في مجال قيم المتغير للحصول على قيمة التكامل (والذي يمثل الأمل الرياضي للمتغير X^2)

$$E(x^2)=(\frac{2^3}{18}+\frac{2^4}{12})-(\frac{0^3}{18}+\frac{0^4}{12})=\frac{64}{36}=1.77$$

بالتعويض في عبارة التباين، نجد $V(X)=E(X^2)-E(X)^2\Rightarrow V(x)=1.77-(1.22)^2$، ومنه التباين يساوي $V(x)=1.77-1.48=0.289$

4-3- خواص الأمل الرياضي و التباين لمتغير عشوائي :

كتذكير، $E(X)$ هو معدل القيم x_i مرفقة بالقيم p_i بالمقارنة مع المفهوم في الإحصاء الوصفي $E(X)$ هو $\overline{x}$ و في ميدان الألعاب هو الربح المتوسط الذي يأمله اللاعب بعد تكرار اللعبة مرات كثيرة ، فانعدام $E(X)$ يدل على أن اللعبة عادلة و $E(x) \succ 0$ يعني أن اللعبة مربحة و في حالة $E(X) < 0$ فهي ليست في مصلحة اللاعب كما في مجال الإحصاء فإن التباين و الانحراف المعياري مقاييس للتشتت .

X و Y متغيران عشوائيان معرفان على نفس المجال و a عدد حقيقي

لدينا $E(X+Y) = E(X) + E(Y)$ و $E(aX) = aE(X)$

حيث $E(X+Y)$ و $E(aX)$ هما الأملان الرياضياتيان لكل من X+Y و aX

ليكن X متغير عشوائي و a ، b عددان حقيقيان ، ينتج من المبرهنة السابقة الخواص التالية :

- $E(X+b) = E(X) + b$
- $Var(X) = E(X - E(X))^2 = E(X^2) - (E(X))^2$
- $\sigma(aX) = |a|\sigma(X)$ و $Var(aX) = a^2\, Var(X)$
- $\sigma(X+b) = \sigma(X)$ و $Var(X+b) = Var(X)$

الفصل الثالث

القوانين الاحتمالية للمتغيرات العشوائية المنفصلة والمتصلة

أولاً:التوزيعات الاحتمالية المنفصلة (المتقطعة)

(Discrete Probability Distributions)

التوزيع الاحتمالي هو جدول أو صيغة أو رسم بياني يصف قيم متغير عشوائي والاحتمال المرتبط بهذه القيم. سنتناول في هذا الفصل أهم التوزيعات الاحتمالية المنفصلة، مثل توزيع ذو الحدين، توزيع بواسون. في بقية هذا الفصل سندرس التوزيعات الاحتمالية المستمرة ونخصصها أساسا للتوزيع الطبيعي.

1- التوزيع الاحتمالي ذو الحدين. Binomial Distribution

إذا كانت هناك تجربة عشوائية لها نتيجتان فقط هما ظهور حدث معين نجاح أو عدم ظهور فشل مثل: نجاح الطالب أو فشلة، المصباح الكهربائي جيد أو تالف، وصول طائرة في موعدها أو عدم وصولها، ظهور الصورة عند رمي قطعة نقود أو عدم ظهورها...الخ

- و إذا أجريت هذه التجربة n من المرات و بافتراض أن احتمال نجاح هذه التجربة هو p الذي يكون ثابتاً في كل تجربة عشوائية نقوم بها. و احتمال فشلها هو $q = 1 - p$ حيث $p + q = 1$

- نفرض أن X هو المتغير العشوائي المعرف على هذه التجربة و يرمز إلى عدد مرات النجاح لهذه التجربة.

تعطى دالة كثافة الاحتمال للمتغير العشوائي X و التي نرمز لها بالرمز $f(x)$ بالمعادلة

$$p(X=x) = f(x) = \begin{cases} \binom{n}{x} P^x (1-p)^{n-x} & x = 0,1,2,\ldots,n \\ 0 & \text{ماعدا ذلك} \end{cases}.$$

حيث n عدد صحيح موجب، $0 < p < 1$. تحت هذه الشروط واضح أن $f(x) \geq 0$

ملاحظة: نذكر هنا بالعلاقة الرياضية الشهيرة التالية : $(a+b)^n = \sum_{x=o}^{n} \binom{n}{x} b^x a^{n-x}$ مفكوك ذي الحدين.

قلنا سابقاً أن أي دالة رياضية $f(x)$ متعلقة بمتغير عشوائي ستكون "دالة كثافة احتمالية إذا تحقق الشرطان:

$$1)\ f(x) \geq o$$
$$2)\ \sum_{x=0}^{n} f(x) = 1$$

سنبرهن لاحقاً أنّ الدالة الرياضية المعطاة لتوزيع ذو الحدين هي فعلاً دالة كثافة احتمالية، نبدأ أولا بالشرط الأول ثم الشرط الثاني:

نبرهن أن $f(x) \geq 0$ ، $x = 0,1,2,\ldots.. n$ __ $\binom{n}{x} = \frac{n!}{x!(n-x)!} \rangle o$ وأيضا

p^x , $q^{n-x} = (1-p)^{n-x}$ موجبتان لجميع قيم X حيث $x = 0,1,2,\ldots., n$ و منها نستنتج أن $f(x)$ موجبة.

الشرط الثاني، يكفي البرهنة على صحة هذه العلاقة، وبعد نشر وتبسيط العبارة الأصلية نصل إلى أن المجموع يساوي الواحد كما هو موضح أسفل.

$$\sum_{x=o}^{n} \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x} = [(1-p) + p]^n = 1$$

أي أن $f(x)$ تحقق شروط دالة كثافة الاحتمال للمتغير العشوائي X المنفصل و يطلق عليها دالة كثافة احتمال ذو الحديين. و في هذه الحالة نقول أن المتغير العشوائي X يتبع توزيع ذو الحدين بمعلمات إحصائية هي n : عدد التجارب العشوائية ، وp: الذي يمثل احتمال النجاح، و يُرمز لذلك بالرمز $X \sim b(n,p)$.

الأمل الرياضي والتباين لتوزيع ثنائي الحدين

معالم هذا التوزيع الاحتمالي (الأمل الرياضي والتباين) موضحة في الجدول أسفل

الأمل الرياضي $E(x)$ لتوزيع ثنائي الحدين	$E(x)=n\times p$
التباين $V(x)$ لتوزيع ثنائي الحدين	$V(x)=n\times p\times q$ مع العلم أن: $q=1-p$

إذا يمكن استنتاج أن التباين هو جداء الأمل الرياضي واحتمال الفشل $E(x)\times q=V(x)$ ، هذه العلاقة مهمة في حال التمارين التي يكون فيها احد المعالم مجهول والأخر معلوم، الأمر الذي يسهل عملية حل التمرين.

دالة التوزيع التراكمية لتوزيع ذي الحدين: دالة التوزيع الاحتمالية معطاة بالصيغة التالية

$$F(x)=p(X\le x)=\sum_{X=0}^{x}\binom{n}{X}\ p^{x}\ (1-p)^{n-X}\ ,$$

ملاحظة: في غالب الأحيان نعتمد على **الجداول الإحصائية** للتوزيعات الاحتمالية المختلفة لحساب الاحتمالات، وهذه الجداول توفر قيم دوال التوزيع الاحتمالية . $F(x)=P(X\le x)$. انظر الملاحق.

مثال

في عملية مراقبة مخزون مؤسسة تجارية، لدينا صندوق يحتوي على 100 هاتف نقال، مع العلم أن هناك 20 هواتف مُعطّلة(لديها خلل تقني)، سحبنا عينة عشوائية من 5 هواتف بطريقة عشوائية (مع إرجاع الهواتف المسحوبة). ليكن X المتغير العشوائي الذي يمثل عدد الهواتف المعطلة في العينة العشوائية المسحوبة من الصندوق، المطلوب،

- ما هو القانون الاحتمالي الذي يتبعه هذا المتغير العشوائي؟
- احسب العدد المتوسط للهواتف المعطلة للممكن سحبها في التجربة العشوائية الواحدة، ما هو مقدار تباين (تشتت) عدد الهواتف المعطلة المسحوبة؟
- ما هو احتمال أن يكون عدد الهواتف المعطلة المسحوبة يساوي 3؟
- ما هو احتمال أن يكون عدد الهواتف المعطلة اقل من 4؟ اكبر أو يساوي 4؟

الحل النموذجي

- من معطيات التمرين، لدينا مجموعة قيم X الممكنة هي: $\Omega_X : \{0,1,2,3,4,5\}$ أي $n = 5$ واحتمال سحب هاتف مُعطل $p = \frac{20}{100} = 0.2$ ، في هذه الحالة نرمز ب $X \sim b\left(5, \frac{20}{100}\right)$ لدالة كثافة الاحتمال المتغير العشوائي، وهي معطاة بالعبارة الرياضية

$$f(x) = \binom{5}{x}\left(\frac{20}{100}\right)^{x}\left(\frac{80}{100}\right)^{5-x} \qquad x = 0,1,2,\ldots..,5$$

- العدد المتوسط للهواتف المعطلة يقابل **الأمل الرياضي** $E(x)$ ، والذي يساوي جداء احتمال الفشل في العدد الأقصى n لمجال قيم المتغير X ، بالتعويض نجد $E(x) = n \times p = 5 \times 0.2 = 1$ ، أي بالمتوسط سيكون هاتف معطل واحد من بين 5 هواتف مسحوبة.

- التباين $V(x) = n \times p \times q$، نعوض القيم المحسوبة نجد: $V(x) = 5 \times 0.2 \times 0.8 = 0.8$، يمكن حساب الانحراف المعياري $\sigma_X = \sqrt{V(x)} = \sqrt{0.8} = 0.894$، يقدر مقدار تشتت عدد الهواتف المعطلة المسحوبة ب هاتف واحد (بالتقريب إلى العدد الصحيح الأكبر).

$$P(X \le x) = \sum_{r=0}^{x} C_r^n p^r (1-p)^{n-r}$$

$p=$		0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09	0.1	0.15	0.2
$n=2$	$x=0$	0.9801	0.9604	0.9409	0.9216	0.9025	0.8836	0.8649	0.8464	0.8281	0.8100	0.7225	0.6400
	1	0.9999	0.9996	0.9991	0.9984	0.9975	0.9964	0.9951	0.9936	0.9919	0.9900	0.9775	0.9600
	2	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
$n=3$	$x=0$	0.9703	0.9412	0.9127	0.8847	0.8574	0.8306	0.8044	0.7787	0.7536	0.7290	0.6141	0.5120
	1	0.9997	0.9988	0.9974	0.9953	0.9928	0.9896	0.9860	0.9818	0.9772	0.9720	0.9393	0.8960
	2	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9999	0.9998	0.9997	0.9995	0.9993	0.9990	0.9966	0.9920
	3	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
$n=4$	$x=0$	0.9606	0.9224	0.8853	0.8493	0.8145	0.7807	0.7481	0.7164	0.6857	0.6561	0.5220	0.4096
	1	0.9994	0.9977	0.9948	0.9909	0.9860	0.9801	0.9733	0.9656	0.9570	0.9477	0.8905	0.8192
	2	1.0000	1.0000	0.9999	0.9998	0.9995	0.9992	0.9987	0.9981	0.9973	0.9963	0.9880	0.9728
	3	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9999	0.9995	0.9984
	4	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
$n=5$	$x=0$	0.9510	0.9039	0.8587	0.8154	0.7738	0.7339	0.6957	0.6591	0.6240	0.5905	0.4437	0.3277
	1	0.9990	0.9962	0.9915	0.9852	0.9774	0.9681	0.9575	0.9456	0.9326	0.9185	0.8352	0.7373
	2	1.0000	0.9999	0.9997	0.9994	0.9988	0.9980	0.9969	0.9955	0.9937	0.9914	0.9734	0.9421
	3	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9999	0.9998	0.9997	0.9995	0.9978	0.9933
	4	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9997
	5	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

الشكل(5): دالة التوزيع الاحتمالية (التراكمية) لقانون ثنائي الحدين عند قيم معينة ل n و p

- احتمال أن يكون عدد الهواتف المعطلة المسحوبة يساوي 3، أي: $P(X=3) = f(3)$، هناك طريقتان للإجابة

الطريقة الأولى: يكفي نعوض القيمة 3 في دالة الكثافة للحصول على الاحتمال

$$P(X=3) = f(3) = \binom{5}{3} \left(\frac{20}{100}\right)^3 \left(\frac{80}{100}\right)^{5-3} = 0.0512$$

الطريقة الثانية: باستعمال الجدول الإحصائي (الشكل 2)، لحساب هذا الاحتمال يكون بإتباع هذه الخطوات، أولا، نحن نعلم أن $P(X \le x) = F(x)$، ونعلم أيضا أن $P(X=x) = F(x) - F(x-1)$، ونعلم أيضا أن ما هو موجود في الجدول الإحصائي هي قيم $F(x)$، إذا

$$P(X = 3) = F(x = 3) - F(x = 2) = 0.9933 - 0.9421 = 0.0512$$

- احتمال أن يكون عدد الهواتف المعطلة اقل من 4، أي $P(X < 4)$ ، رياضيا هذه المتراجحة تطابق المساواة

$$P(X < 4) = P(X = 3) + P(X = 2) + P(X = 1) + P(X = 0)$$

إذا يكفي حساب الاحتمالات الجزئية وجمعها للحصول على احتمال $P(X < 4)$ ، كما اجبنا في حساب الاحتمال الأول، هناك طريقة دالة الكثافة الاحتمالية (وهي متعبة في هذا السؤال) وطريقة دالة التوزيع الاحتمالية (وهي أحسن وأسرع طريقة في مثل هذه الأسئلة).

الطريقة الأولى: يكفي نعوض القيم $0،1،2،3$ في دالة الكثافة للحصول على الاحتمال الكلي، ونحصل على

$$P(X<4)=f(3)+f(2)+f(1)+f(0)=0.0512+0.2048+0.4096+0.3277=0.9933$$

الطريقة الثانية: باستعمال دالة التوزيع الاحتمالية في الجدول الإحصائي، المتراجحة الرياضية $P(X < 4)$ تطابق المتراجحة $P(X \leq 3)$ (طبعاً ضمن مجموعة الأعداد الطبيعية)، ومنه $P(X < 4) = P(X \leq 3) = F(3)$ ، من الجدول الإحصائي، $F(3) = 0.9933$

- احتمال أن يكون عدد الهواتف المعطلة اكبر أو يساوي 4، أي $P(X \geq 4)$ ، هذا الحدث العشوائي هو عكس الحدث السابق (عدد الهواتف اقل من 4)، ومنه نستعمل خاصية الحدث العكسي والتي تنص على انّ مجوع احتمال الحدث وحدثه العكسي هو الواحد، ومنه:

$$P(X \geq 4) = 1 - P(X < 4) = 1 - P(X \leq 3) = 1 - F(3) = 1 - 0.9933 = 0.0067$$

مثال نرمي ستة أحجار نرد مرة واحدة . نفرض أننا نراقب ظهور الوجه الذي يحمل الرقم (4) . أوجد دالة كثافة الاحتمال الخاصة بالمتغير X والذي يمثل ظهور الرقم (4) .

الحل

$n = 6$ احتمال ظهور الرقم 4 ثابت ويساوي $p = \frac{1}{6}$. احتمال عدم ظهور الرقم 4 ثابت ايضاً $= q = (1-p) = \frac{5}{6}$ و تكون دالة كثافة الاحتمال هي

$$f(x) = \begin{cases} \left(\frac{6}{x}\right)\left(\frac{1}{6}\right)^{x}\left(\frac{5}{6}\right)^{6-x} & , \quad , \quad x = 0,1,2,3,4,5,6 \\ 0 & , \end{cases}$$

خلاف ذلك يمكن استخدام دالة كثافة الاحتمال لإيجاد عدة احتمالات كان من الصعب حسابها باستخدام المبادئ الأولية للاحتمالات. فمثلاً. (1) احتمال الحصول على وجه واحد يحمل الرقم (4) يمكن الحصول عليه من دالة كثافة الاحتمال بعد تعويض قيم $n\ , p, q, x$

$$f(1) = \left(\frac{6}{1}\right)\left(\frac{1}{6}\right)^{1}\left(\frac{5}{6}\right)^{5}$$

- احتمال ظهور الرقم 4 مرة واحدة على الأقل عند رمي أحجار النرد، هذا الاحتمال يطابق المتراجحة $P(X \geq 1)$ ، ومنه الإجابة تكون كما يلي:

$$p(x \geq 1) = f(1) + f(2) + f(3) + f(4) + f(5) + f(6)$$

نستعين بخاصية الحدث العكسي ونحصل على $P(X \geq 1) = 1 - P(X < 1) = 1 - P(X = 0)$

$$P(X \geq 1) = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^{6} = 1 - 0.3348979 = 0.66511$$

ملاحظة: إذا كان عدد المحاولات يساوى واحد $N = 1$ فأن توزيع زى الحدين يأخذ الشكل الآتي:-

$$f(x) = \begin{cases} \left(\frac{1}{x}\right) p^x \ (1-p)^{1-x} , & x = 0,1 \\ 0 , & \end{cases}$$

يمكن أن نجد كذلك الصيغة التالية في بعض المراجع

$$f(x) = \begin{cases} p^x \ (1-p)^{1-x} , & x = 0,1 \\ 0 , & \end{cases}$$

و يطلق علية اسم توزيع برنولى Bernoulli Distribution نسبة إلى مكتشـفة الرياضي السويسري.

مثال : عند إلقاء عملة معدنية مرة واحدة فأن دالة كثافة الاحتمال للحدث العشوائي "لظهور الوجه" هي

$$f(x) = \begin{cases} \left(\frac{1}{2}\right)^x \ \left(\frac{1}{2}\right)^{1-x} , & x = 0,1 \\ 0 , & \end{cases}$$

و معنى هذا أن التوزيع المذكور يعتبر حالة خاصة من توزيع ذي الحديين عندما تكون $n = 1$

واضح أن هناك علاقة وثيقة بين توزيع برنوللى و توزيع ذي الحديين. فإذا تكررت محاولة برنولى n مرة و كانت X_i هـي المتغير العشـوائي في المحاولـة i فـأن المتغير $X = \sum X_i$ يتبـع توزيـع ذو الحـدين. أي أن توزيـع ذي الحدين بمعالم n, p هو مجموع n متغير عشوائي يتبع كل منها توزيع برنولى بمعلمة p . و بمعنى آخر أذا كانت X_n , ... , X_1, X_2 متغيرات عشوائية يتبع كل منها توزيع برنولى بمعلمة p فأن $X = \sum X_i$ يتبع توزيع ذي الحدين بمعالم p, n .

2- التوزيع الاحتمالي لبواسون Poisson Distribution

في الحياة العملية أحيانا ما نقابل بعض الظواهر التي ينطبق عليها شروط توزيع ذي الحدين و لكن هذه الحوادث تكون نادرة الوقوع و هذا يعنى أن احتمال النجاح يكون صغير جدا يقترب من الصفر و علية فأنة يمكن القول أن $n\,p=\lambda$ حيث λ هي مقدار ثابت و بذلك يكون احتمال الفشل كبير أي أنة يقترب من الواحد. و لكي نراقب بعض حالات النجاح فأننا سنجد أن n سوف تكون كبيرة جدا فمثلا لو أردنا حساب احتمال خروج القطار من على السكة الحديدية فأننا سنقوم بمراقبة القطارات أو عدد كبير جدا منها و نحسب عدد مرات خروج القطار من على الشريط أي حالات النجاح (التي حققت فيها الحادثة) حتى نستطيع أن نحسب الاحتمال.و بذلك تكون شروط هذا التوزيع كالآتي:

- ✓ أن يكون احتمال النجاح ثابت و كذلك احتمال الفشل في كل محاولة و يرمز لهما بالرمز q, p على الترتيب.
- ✓ أن يكون احتمال النجاح صغيرا و يقترب من الصفر و احتمال الفشل يقترب من الواحد الصحيح.
- ✓ أن تكون عدد المحاولات كبيرا جدا حيث أن $= n\,p=\lambda$ مقدار ثابت.

و يعتبر توزيع بواسون من أهم التوزيعات في المسائل المتعلقة بالمكالمات الهاتفية و حركة المرور، وبعض الظواهر النادرة مثل الزلزال، و الحرائق، حوادث سقوط الطائرات، عدد الأخطاء المطبعية في صفحة ما من كتاب و غير ذلك. و دالة كثافة الاحتمال لتوزيع بواسون هي :

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\lambda^{x}\ e^{-\lambda}}{x\,!} & , \quad x=0,1,2,3,.....\\ 0 & ,\end{cases}$$

. حيث $e = 2.718$ تمثل مقدار ثابت، وقيمة λ تحسب كما يلي: $\lambda = n\ p$

و تأخذ X قيما صحيحة موجبة اعتبارا من الصفر إلى ما لا نهاية. إثبات أنها دالة كثافة احتمال، يلاحظ أن المتسلسلة

$$e^{\lambda} = 1 + \lambda + \frac{\lambda^2}{2!} + \frac{\lambda^3}{3!} + \ldots\ldots = \sum_{x=0}^{\infty} \frac{\lambda^x}{x!}$$

حيث $\lambda \rangle 0$

و حيث أن $\lambda \rangle 0$ في $\therefore f(x)$

$$f(x) \geq 0$$

$$\therefore \sum_{x=0}^{\infty} f(x) = \sum_{x=0}^{\infty} \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!}$$

$$= e^{-\lambda} \sum_{x=0}^{\infty} \frac{\lambda^x}{x!} = e^{-\lambda} e^{\lambda} = e^{0} = 1$$

الدالة $f(x)$ تحقق شروط دالة كثافة احتمال لمتغير عشوائي منقطع.

دالة التوزيع التراكمية لتوزيع بواسون

$$F(x) = p(X \leq x) = \sum_{x=0}^{x} f(x) \qquad X \geq o$$

$$F(x) = \sum_{x=0}^{x} \frac{e^{-\lambda} \lambda^x}{x!} \qquad X \geq 0$$

الأمل الرياضي والتباين لتوزيع بواسون:

خاصية أساسية في التوزيع الاحتمالي لبواسون هي: **الأمل الرياضي يساوي التباين**، $V(x) = E(x) = \lambda$

يمكن البرهنة على هذه المساواة بين الأمل الرياضي والتباين، باستعمال الدالة المولدة للعزوم (التي لم نتطرق إليها في هذا المستوى)، وهي دالة رياضية معرفة كما يلي: $M(t)=E(e^{tx})$ ، وهي تُمثل الأمل الرياضي للدالة e^{tx}, حيث $t \in R$، (في الملاحق وضعنا جدول يحتوي على كل دوال العزوم للتوزيعات الاحتمالية المشهورة). دالة العزوم بالنسبة لتوزيع بواسون هي: $M(t)= e^{-\lambda(1-e^t)}$. نستخدم هذه الدالة لحساب الأمل الرياضي والتباين كما يلي:

العزم من الدرجة (k) ما هو إلا مشتق دالة العزوم من الرتبة (^{k}) عند قيمة $t=0$ ، رياضياً العلاقة معرفة كما يلي، $m_k = M^{(k)}(0)$ ، ونعلم أن العزم من الدرجة (1) يقابل الأمل الرياضي، والتباين هو الفرق بين العزم من الدرجة (2) ومربع العزم الأول (أي مربع الأمل الرياضي)

باتباع هذه القاعدة الرياضية، يمكننا حساب الأمل الرياضي والتباين لتوزيع بواسون كما يلي

الأمل الرياضي $E(x)$

المشتق الأول لدالة العزوم الخاصة بتوزيع بواسون هي: $M'(t) = e^{\lambda(e^t-1)}\ \lambda\ e^t = \lambda\ e^{t+\lambda(e^t-1)}$ ، ومنه الأمل الرياضي $E(x)=m_k=M^{(k)}(0)=\lambda$.

التباين $V(x)$

المشتق الثاني لدالة العزوم الخاصة بتوزيع بواسون هي: $M''(t) = e^{\lambda(e^t-1)}\ \lambda e^t + \left(\lambda\ e^t\right)^2\ e^{\lambda(e^t-1)}$ ، ومنه العزم من الدرجة الثانية $m_2 = M^{(2)}(0)=\lambda+\lambda^2$ ، وذكرنا أنّ $V(x)=m_2-(m_1)^2$ بالتعويض نجد: $V(x)=\lambda+\lambda^2-\lambda^2=\lambda$. ومنه تتأكد الخاصية التي ذكرناها في الصفحة السابقة بان: $V(x)=E(x)=\lambda$

مثال في مؤسسة إنتاجية للمصابيح الكهربائية، تضمن تقرير خاص لمراقب النوعية في هذه المؤسسة أن نسبة الوحدات المعيبة في إنتاج نوع من المصابيح الكهربائية هي 2% وان عدد الوحدات المعيبة يتبع توزيع بواسون. نفرض أننا سحبنا عينة عشوائية من عشرة مصابيح. المطلوب

1. إيجاد التوزيع الاحتمالي لهذا المتغير الإحصائي.

2. احتمال الحصول على مصباح واحد معيب.

3. احتمال الحصول على مصباح معيب على الأكثر.

الحل

إذا علمنا أن المتغير الإحصائي (عدد الوحدات المعيبة) يتبع توزيع "بواسون"، تحت شرط نسبة 2 % كإنتاج معيب، إذا $\lambda = n\,p = (10)\,(0.02) = 0.2$.

ومنه دالة كثافة الاحتمال هي $f(x) = \dfrac{e^{-0.2}\,(0.2)^x}{x\,!}$ $\qquad x = 0,1,2,.....$

1- احتمال الحصول على مصباح معيب، يمكن الاعتماد على دالة الكثافة الاحتمالية لحساب هذا الاحتمال:

$$f(1) = \frac{e^{-0.2}\,(0.2)}{1!} = \frac{0.2}{e^{+0.2}} = 0.163746$$

الطريقة الثانية: باستعمال الجدول الإحصائي لقانون "بواسون" (الشكل 3)، لحساب هذا الاحتمال يكون بإتباع هذه الخطوات، أولا، نحن نعلم أن $P(X \le x) = F(x)$، ونعلم أيضا أن $P(X = x) = F(x) - F(x-1)$، ونعلم أيضا أن ما هو موجود في الجدول الإحصائي هي قيم $F(x)$، إذا، $P(X = 1) = F(1) - F(0)$، عند قيمة $\lambda = 0.2$،

$$P(X \le x) = \sum_{r=0}^{x} \lambda^r \frac{e^{-\lambda}}{r!}$$

λ=	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
x= 0	0.9048	0.8187	0.7408	0.6703	0.6065
1	0.9953	0.9825	0.9631	0.9384	0.9098
2	0.9998	0.9989	0.9964	0.9921	0.9856
3	1.0000	0.9999	0.9997	0.9992	0.9982
→ 4	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9998
5	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
6	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
7	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
8	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
9	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

الشكل (6): مستخرج من الجدول الإحصائي لقانون توزيع بواسون، (انظر الملاحق)

بالتعويض نجد أن

$$P(X=1) = 0.9825 - 0.8187 = 0.1638$$

وهي نفس النتيجة عند استعمال دالة الكثافة الاحتمالية.

2- احتمال الحصول على وحدة معيبة على الأكثر .

$$\begin{aligned} p(X \le 1) = F(1) &= \sum_{x=0}^{1} e^{-0.2} (0.2)^x \\ &= e^{-0.2} + e^{-0.2} (0.2) \\ &= e^{-0.2} (1+0.2) \\ &= e^{-0.2} (1.2) = 0.9825 \end{aligned}$$

الطريقة الثانية باستعمال الجدول الإحصائي، سهلة جداً وسريعة، نقرأ في الجدول مباشرة (الشكل 2) عند قيمة $\lambda = 0.2$، وعند قيمة $x = 1$ نجد مباشرة أن قيمة الاحتمال المقابل للحصول على مصباح معيب على الأكثر هو: $p(X \le 1) = F(1) = 0.9825$

3- التوزيع الاحتمالي فوق-الهندسي The Hyper-Geometric Distribution

في التوزيعيين السابقين (توزيع ثنائي الحدين و توزيع بواسون) افترضنا أن احتمال النجاح ثابت من محاولة إلى أخرى أي أن الأحداث مستقلة. كما افترضنا في توزيع بواسون أن عدد المحاولات كبير جدا و الآن نريد أن نتعرف على توزيع يكون احتمال النجاح فيه غير ثابت و عدد المحاولات لا يمكن أن يكون كبير. و هذا التوزيع يصلح للمجتمعات المحدودة عندما يكون السحب بدون إرجاع.

للتعرف على دالة هذا التوزيع نفترض أن:

افتراض 1

- حجم المجتمع محدود N

افتراض 2

- نفرض أن هذا المجتمع مقسم إلى جزئين الأول يتكون من M وحدة لها خاصية معينة، و الجزء الثاني مكون من N – M وحدة و ليس له هذه الخاصية

افتراض 3

- نفرض أننا أخذنا عينة بطريقة عشوائية من هذا المجتمع حجمها n و كان السحب أو اختيار مفردات هذه العينة بدون إرجاع أي أن (الحوادث غير مستقلة). فطبيعي أن احتمال النجاح في كل محاولة سوف يختلف.

تحت هذه الشروط (أو الافتراضات) يكون المتغير الإحصائي x يتبع القانون الاحتمالي "فوق- الهندسي" والذي يأخذ دالة كثافة الاحتمال الخاصة التالية :

$$f(x) = p_r\ (X = x) = \frac{\binom{M}{x}\binom{N-M}{n-x}}{\binom{N}{n}} \quad , \quad x = 0,1,2, \ldots\ldots\ldots , n$$

مثال: أثناء مراقبة دورية لحالة المنتوج في مؤسسة، اكتشف المراقب تلف جزئي لعدة صناديق في وحدة التخزين، وأن كل صندوق يحتوى على 25 وحدة منها 10 وحدات معيبة (تالفة)، نفرض أننا سحبنا عينة مكونة من خمسة وحدات بطريقة عشوائية من احد الصناديق، وكان السحب بدون إرجاع. المطلوب اوجد احتمال الحصول على (5) وحدات سليمة و كذلك احتمال الحصول على (4) وحدات معيبة.

الحل

حيث السحب بدون إرجاع فأن دالة كثافة الاحتمال نأخذ الشكل الآتي :

$$f(x) = \frac{\binom{10}{x}\binom{25-10}{5-x}}{\binom{25}{5}}$$

و منه احتمال الحصول على خمسة وحدات سليمة يطابق ويساوي احتمال عدم الحصول على وحدات معيبة، أي $p(X=0)$ هو

$$p(X=0) = f(0) \frac{\binom{10}{0}\binom{15}{5}}{\binom{25}{5}} = \frac{\binom{15}{5}}{\binom{25}{5}} = 0.0565$$

واحتمال الحصول على 4 وحدات معيبة (تالفة)، أي $p(X=4)$ هو:

$$p(X=4) = f(4) = \frac{\binom{10}{4}\binom{15}{5-4}}{\binom{25}{5}} = 0.0593$$

الوسط الحسابي و الانحراف المعياري لتوزيع فوق الهندسي

إذا كان المتغير العشوائي X تتوزع حسب قانون "فوق-الهندسي" فإن:

- الوسط الحسابي للمتغير العشوائي يساوي: $\mu = E(x) = n \cdot \frac{M}{N}$
- والتباين يساوي: $Var(x) = n \cdot \frac{M}{N} \cdot \frac{N-M}{N} \cdot \frac{N-n}{N-1}$

أي أن المتوسط $n\frac{M}{N} = \mu = E(x)$ حجم العينة مضروباً في احتمال النجاح في المجتمع. (و الانحراف المعياري) 2 = التباين = حجم العينة مضروباً في $\frac{M}{N}$ و هو احتمال النجاح في المجتمع مضروبا في $\left(1 - \frac{M}{N} = \frac{N-M}{N}\right)$ و هو احتمال الفشل في المجتمع مضروبا في $\frac{N-n}{N-1}$ $\Leftarrow$ و هو مقدار يساوى الواحد الصحيح عندما يكون السحب بإرجاع و يطلق علية اسم التصحيح للمجتمعات المحدودة.

البرهان

$$\mu = E(x) = \sum_{x=o}^{n} x \frac{\binom{M}{x}\binom{N-M}{n-x}}{\binom{N}{n}} = \sum_{x=0}^{n} x\, f(x)$$

$$= \sum_{x=0}^{n} x \frac{M!}{x!(M-x)!} \qquad \binom{N-M}{n-x} \Big/ \binom{N}{n}$$

نفس الأمر مع الانحراف المعياري لتوزيع فوق-الهندسي الذي يساوي الانحراف المعياري لتوزيع ذي الحدين مضروباً في المقدار $\sqrt{\frac{N-n}{N-1}}$ (الذي يسمى بمعامل تصحيح المجتمعات)

دالة التوزيع التراكمية لقانون الاحتمالي "فوق الهندسي"

$$F(x) = p(X \le x) = \sum_{x=0}^{x} \frac{\binom{M}{x}\binom{N-M}{n-x}}{\binom{N}{n}} \qquad 0 \le x \le n$$

تقريب ذي الحدين كتقريب لتوزيع فوق-الهندسي

يمكن استخدام توزيع ذي الحدين كتقريب للحالات التي يطبق عليها توزيع فوق-الهندسي بشرط ألا تكون (N) صغيرة جدا. ويمكن استعمال العلاقة التالية: إذا كان $\frac{n}{N} \le 0{,}05$.

ملاحظة إذا وضعنا $p = \frac{M}{N}$ فأن الوسط الحسابي $\mu = n\frac{M}{N} = np$ لتوزيع "فوق الهندسي" يكون مساويا للوسط الحسابي لتوزيع ذي الحدين.

$$\frac{N-M}{N} = 1 - \frac{M}{N} = 1 - p$$

$$\sqrt{Var(x)} = \sqrt{n\,p\,(1-p)\left(\frac{N-n}{N-1}\right)}$$

مثال عينة مكونة من (5) وحدات اختيرت بطريقة عشوائية من مجموعة مكونة من (50) وحدة تحتوى على (5) وحدات معيبة و المطلوب حساب الاحتمالات المختلفة باستخدام ذي الحدين و التوزيع فوق-الهندسي و المقارنة بينهما.

الحل

أولا إذا افترضنا أن السحب تم بإرجاع فأن احتمال النجاح سوف يكون ثابتا و مقداره $P = \frac{5}{50} = 0.1$ و بذلك يكون احتمال الفشل $q = 1 - 0.1 = 0.9$ و تكون دالة التوزيع الاحتمال لتوزيع زى الحدين هي

$$f(x) = \binom{5}{x} (0.1)^x \ (0.9)^{5-x} \quad , \quad x = 0,1,2,3,4,5$$

و بالتعويض يقيم x المختلفة نحصل على $f(x)$ الموضحة في الجدول.

ثانيا إذا كان السحب بدون إرجاع فأن احتمال النجاح و كذلك احتمال الفشل غير ثابت و تكون دالة كثافة الاحتمال لتوزيع فوق–الهندسي هي $f(x) = \dfrac{\binom{5}{x}\binom{45}{5-x}}{\binom{50}{5}} \quad , \quad x = 0,1,2,3,4,5$

و بالتعويض بقيم x المختلفة نحسب $f(x)$ الموضحة بالجدول الآتي :

الجدول (8): جدول التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي، باستعمال قانون ثنائي الحدين و فوق–الهندسي

X : عدد الوحدات المعيبة	الاحتمالات باستعمال توزيع **ثنائي الحدين**	الاحتمالات باستعمال توزيع **فوق–الهندسي**
0	0.5949	0.5766
1	0.32805	0.35336
2	0.0729	0.06392
3	0.0081	0.0005
4	0.00045	0.00011
5	0.00001	0.0000015

المصدر: من إعداد الباحث

يتضح من الجدول أن الاحتمالات تقترب من بعضها و بذلك يمكن اعتبار توزيع زى الحدين تقريب جيد لتوزيع فوق-الهندسي عندما تكون n ليست صغيرة جدا. و لكن يجل أن ننوه إلى أن في حالة السحب بإرجاع يكون توزيع ثنائي الحدين هو الذي يعطى الاحتمال المضبوط أما في حالة السحب بدون إرجاع فأن توزيع فوق-الهندسي يعطى الاحتمال المضبوط.

ثانياً: القوانين الاحتمالية المتصلة: قانون التوزيع الطبيعي

(Continuos Probability Distributions)

كتذكير لما تطرقنا إليه في محور المتغيرات العشوائية، غالباً ما توصف العمليات العشوائية إما بدالة الكثافة الاحتمالية أو دالة التوزيع الاحتمالية. وتكون دالة الكثافة الاحتمالية، المشار إليها هنا بالعلامة $f(x)$ للمتغير x، بحيث أن الاحتمال لكي يأخذ المتغير x قيمة في الفاصل المتناهي الصغر بين x و $x+dx$ يكون $f(x)dx$. وتعطي دالة التوزيع التراكمية(الاحتمالية) المسماة $F(x)$ احتمال أن يأخذ المتغير قيمة أصغر من x. أي تكون العلاقة بين الدوال كما يلي:

$$F(x)=\int_{c}^{x} f(t)\ \mathrm{d}t \qquad \text{أو} \quad ، f(x)=\frac{d}{dx}[F(x)]$$

حيث: c هي الحد الأدنى للقيم التي يمكن أن تأخذها t.

نجد أهم التوزيعات الاحتمالية للمتغيرات الكمية المتصلة،

التوزيع الطبيعي (Normal Distribution)	توزيع لوغاريتمي طبيعي (Log-Normal Distribution)	توزيع كاي χ^2 لبيرسون Chi-Squared Distribution (***)	توزيع غاما و التوزيع الأسي: Gamma Distribution and Exponential Distribution

(***): يُستعمل أساسا في الاستدلال الإحصائي ونظرية الاختبارات الإحصائية، وسيكون الطالب في حاجة إليه بقوة في **مقياس الاحصاء3** بحول الله.

نهتم في هذا المستوى بالتوزيع الطبيعي (Normal Distribution)، وتبقى التوزيعات الاحتمالية الأخرى من اجتهاد الطالب(ولقد وضعنا ملخص لأهم هذه التوزيعات وخصائصها الشكل الرياضي لدوالها الاحتمالية في الملاحق).

1- التوزيع الطبيعي Normal Distribution

يُعتبر التوزيع الطبيعي من أهم التوزيعات المتصلة حيث يلعب دوراً أساسياً في عملية المعاينة Sampling ، كما يستخدم لوصف الأنماط التكرارية للعديد من الظواهر الإحصائية مثل التغيرات الطبيعية التي تحدث للإنسان والحيوان والعوامل البيئية بشكل عام . والتوزيع الطبيعي يدرس سلوك المتغيرات العشوائية المتصلة مثل درجة الحرارة والطول والوزن والدخل والأخطاء العشوائية الناتجة عند تحليل الانحدار.

وبدراسة شكل منحنى التوزيع الطبيعي نجد أنه منحنى متماثل حول الوسط الحسابي للتوزيع ، ويأخذ الشكل الجرسي وله قمة واحدة ويمتد طرفاه إلى ما لانهاية مقتربين من المحور الأفقي شيئا فشيئا دون أن يتماسا مع هذا المحور . وإذا أسقطنا عموداً من قمة المنحنى على المحور الأفقي فإن هذا العمود يعتبر محوراً للتماثل لأنه يقسم المساحة تحتي المنحنى إلى قسمين متساويين تماماً وينطبق كل منهما على الآخر تمام الانطباق ومساحة كل قسم تساوي 50% من المساحة الكلية تحت المنحنى وينتج عن هذا التماثل أن قيم الوسط الحسابي والوسيط والمنوال للتوزيع الطبيعي تكون متساوية .

وحيث أن التوزيع الطبيعي يعبر عن متغيرات عشوائية متصلة فإننا لا نستطيع استخدام دالة التوزيع له لإيجاد احتمال أن يأخذ المتغير العشوائي الذي يتبعه لقيمة معينة حيث أن هذا الاحتمال يساوى صفراً . ولكن يمكن استخدام دالة التوزيع الطبيعي لإيجاد احتمال أن يأخذ المتغير العشوائي أقل من قيمة معينة أو أكثر من قيمة معينة أو تقع قيمته بين قيمتين معلومتين.

وترجع أهمية التوزيع الطبيعي إلى الأسباب الآتية :

1. يستخدم التوزيع الطبيعي في وصف العديد من المتغيرات العشوائية في الواقع العملي مثل الأطوال والأوزان لمجموعة من الأشخاص ، درجات الطلاب في امتحان مقرر معين ، أخطاء القياس الناتجة من تجربة ما ، حيث تتوزع القياسات المشاهدة (التكرارات) بشكل متماثل حول قيمة مركزية هي قيمة متوسط التوزيع وتقل هذه القياسات تدريجيا كلما ابتعدنا عن هذه القيمة إلى جهة اليمين أو إلى جهة اليسار ، حيث يأخذ منحنى التوزيع الشكل الجرسى .

2. يعتبر التوزيع الطبيعي تقريبا مفيدا للعديد من التوزيعات المتقطعة وغير المتقطعة مثل توزيع ذي الحدين وتوزيع بواسون وتوزيع فوق الهندسي وغيرها .

الأساس الرياضي لقانون التوزيع الطبيعي

ينطبق هذا التوزيع على متغير مستمر بأي إشارة جبرية. تكون كثافة الاحتمال من نمط: $f(x)=e^{-T(x)}$ ، والتي تُسمى عائلة التوزيعات الآسية (Exponential Family)، حيث $T(x)$ دالة متعددة الحدود من الدرجة الثانية غير سالبة. فإذا استعملنا كمعلمات المتوسط m والانحراف المعياري σ، فإن $f(x)$ تُكتب بالصيغة الرياضية التالية:

$$f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x-m}{\sigma}\right)^2\right]$$

عن طريق حساب تكامل دالة الكثافة في المجال $]-\infty,x[$ ، نحصل على صيغة دالة التوزيع الاحتمالية $F(x)$

$$F(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}\exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{t-m}{\sigma}\right)^2\right]\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\left[1+\operatorname{erf}\left(\frac{x-m}{\sigma\sqrt{2}}\right)\right]$$

حيث $\operatorname{erf}(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z e^{-t^2}\, dt$، تمثل دالة الخطأ (Error Function)، وهي دالة مركبة لمتغير مركب.

ملاحظة: لأغراض الحسابات العملية، يمكن تمثيل $F(x)$ بدوال تقريبية، فمثلاً تعتبر الدالة التالية صالحة لمتغير x موجب مع خطأ نسبي أقل من $(2{,}8 \times 10^{-3})$:

$$1 - F(x) = \frac{\exp(-x^2/2)}{\sqrt{2\pi}\left(0.661\,x + 0.339\sqrt{x^2 + 5.51}\right)}$$

دالة كثافة الاحتمال Probability Density Function

إذا كان X متغيرا عشوائيا متصلا يتبع التوزيع الطبيعي بمتوسط μ وانحراف معياري σ فإن دالة كثافة الاحتمال للمتغير العشوائي X تعطى بالعلاقة :

$$f(X) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} \qquad , -\infty < \mathbf{X} < \infty$$

$$, -\infty < \mu < \infty \qquad , \sigma > 0$$

وحيث أن استخدام هذه الدالة لحساب الاحتمالات المختلفة تكتنفه صعوبات رياضية كثيرة تعتمد بالدرجة الأولى على معرفة تامة بتقنيات التكامل الرياضي، علاوة على أنه كما ذكرنا يوجد عدد لا نهائي من التوزيعات الطبيعية والتي تحدد كل منها قيم المعلمتين μ ، σ فإنه لحسن الحظ يمكن تحويل أي توزيع طبيعي إلى توزيع

طبيعي قياسي له جداول خاصة تعرف باسم جداول المساحات تحت منحنى التوزيع الطبيعي المعياري متي علم متوسطه وانحرافه المعياري .(انظر الملاحق).

2- التوزيع الطبيعي المعياري Standard Normal Distribution

إذا كان X متغير عشوائي يتبع التوزيع الطبيعي بمتوسط μ وانحراف معياري σ فإن Z تتبع التوزيع الطبيعي المعياري بمتوسط صفر، وانحراف معياري يساوي الواحد الصحيح حيث:

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$$

وتسمى Z أيضا بالقيمة المعيارية أو الدرجة المعيارية وهي تساعد على إيجاد المساحة أو الاحتمال المطلوب أسفل أي منحنى توزيع طبيعي وذلك باستخدام جدول المساحات تحت منحنى التوزيع الطبيعي المعياري . هذا وتأخذ دالة كثافة الاحتمال للمتغير Z الشكل الآتي :

$$f(Z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\left(\frac{1}{2}Z^2\right)} \qquad , -\infty < Z < \infty$$

ومن الجدير بالذكر هنا أن الدالة لا تعتمد على معالم مجهولة القيمة وبالتالي فقد استخدمت في حساب جدول المساحات تحت منحنى التوزيع الطبيعي المعياري المشار إليه.

خصائص المنحنى الطبيعي المعياري

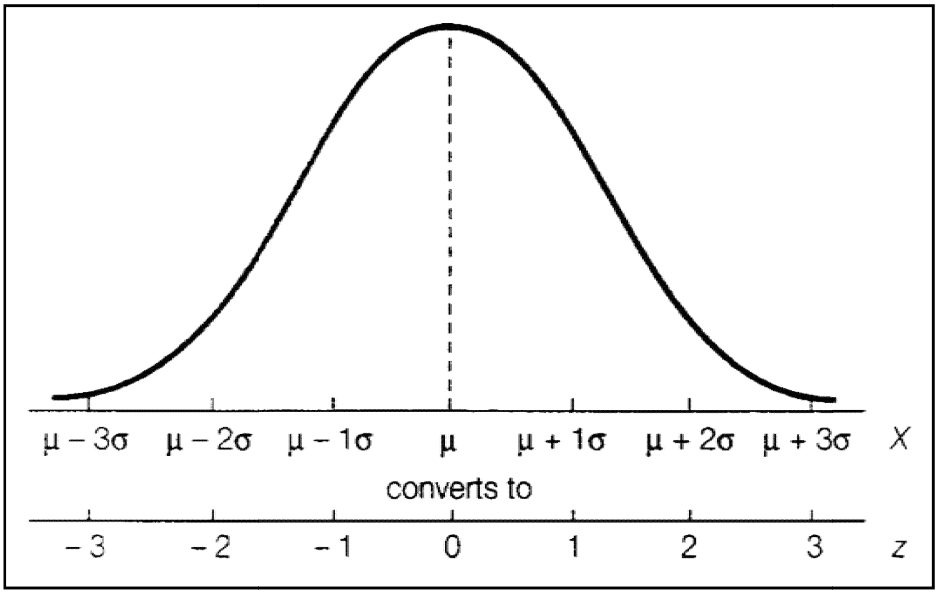
- ✓ المساحة الكلية تحت منحنى التوزيع الطبيعي المعياري تساوى الواحد الصحيح بحيث يقسم الخط العمودي الواصل من قمة المنحنى إلى الصفر (متوسط التوزيع) المساحة إلى قسمين متساويين مساحة كل منهما تساوي 0.05

- ✓ منحنى التوزيع الطبيعي المعياري متماثل حول متوسطه ، وبالتالي فإن التواءه يساوى صفر وتفرطحه يساوى 3 .
- ✓ المساحة المحصورة بين 1 ± درجة معيارية تساوى 68.26 % تقريبا من المساحة الكلية تحت المنحنى . والمساحة المحصورة بين 2 ± درجة معيارية تساوى 95.44 % تقريبا من المساحة الكلية تحت المنحنى . أما المساحة المحصورة بين 3 ± درجات معيارية تساوى 99.74 % تقريبا من المساحة الكلية تحت المنحنى . هذا ويمكن التعبير عن ذلك رمزيا كالآتي :

$$P(-1 < Z < 1) = 0.6826$$

$$P(-2 < Z < 2) = 0.9544$$

$$P((-3 < Z < 3) = 0.9974$$



الشكل (7): التمثيل البياني لدالة التوزيع الاحتمالية للقانون الطبيعي مع الإشارة لأهم خصائصها

مثال تطبيقي (1)

إذا كان العمر الافتراضي لمشغل الأقراص المرنة والمنتج بمعرفة إحدى شركات الكمبيوتر يتبع التوزيع الطبيعي بمتوسط 1000 ساعة وانحراف معياري 100 ساعة . فإذا تم اختيار وحدة مشغل من إنتاج هذه الشركة بطريقة عشوائية ، فأوجد احتمال أن يكون عمرها الافتراضي :

1. بين 1000 ، 1150 ساعة .
2. أقل من 930 ساعة .
3. أكبر من 780 ساعة .
4. بين 700 ، 1200 ساعة .
5. بين 750 ، 850 ساعة .

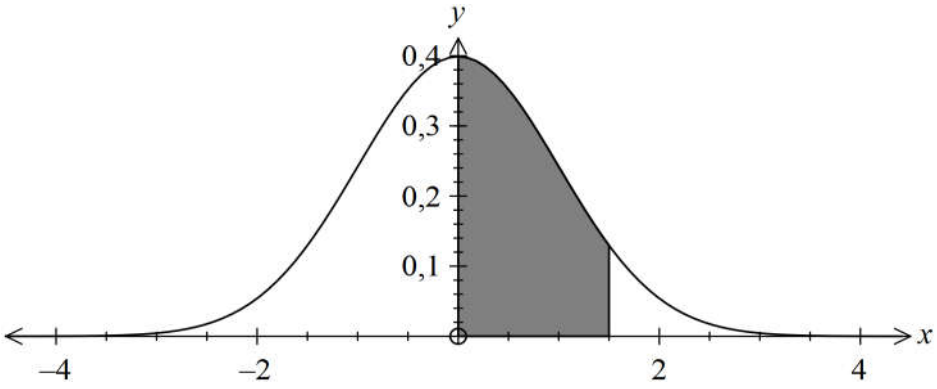
الحل النموذجي للمثال

نفرض أن المتغير العشوائي χ يعبر عن العمر الافتراضي لمشغل الأقراص المرنة ، أى أن : المتوسط $\mu = 1000$ ساعة و الانحراف المعياري $\sigma = 100$ ساعة

1. احتمال أن يكون العمر الافتراضي لمشغل الأقراص المرنة بين 1000 ، 1150 ساعة

$$P(1000 \le X \le 1150) = P\left(\frac{1000-1000}{100} \le \frac{X-\mu}{\sigma} \le \frac{1150-1000}{100}\right)$$

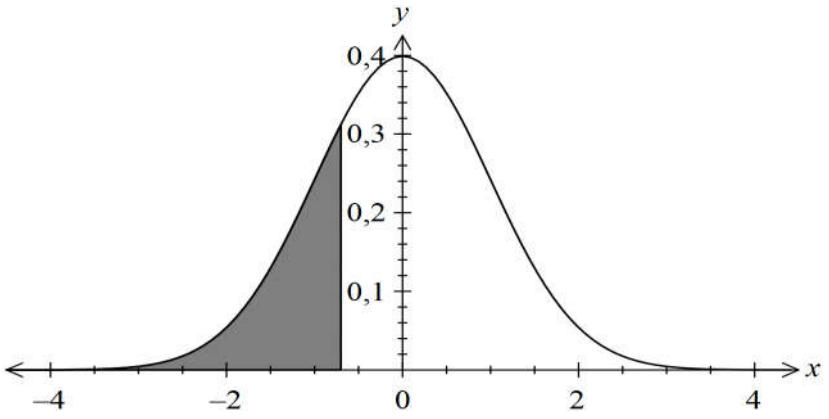
$$= P(0 \le Z \le 1.5) = 0.4332$$



2– احتمال أن يكون العمر الافتراضي لمشغل الأقراص المرنة أقل من 930 ساعة

$$= p\left(Z < \frac{-70}{100}\right) \quad P(X < 930) = P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} < \frac{930-1000}{100}\right)$$

$$= p(Z < -0.7) = 0.5 - 0.2580 = 0.2420$$



3– احتمال أن يكون العمر الافتراضي لمشغل الأقراص المرنة أكبر من 780 ساعة

$$P(X > 780) = P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} > \frac{780-1000}{100}\right) = P\left(Z > \frac{-220}{100}\right)$$

$$= P(Z > -2.2) = 0.5 + P(-2.2 < Z < 0)$$

$$= 0.5 + P(0 < Z < 2.2)$$
$$= 0.5 + 0.4861 = 0.9861$$

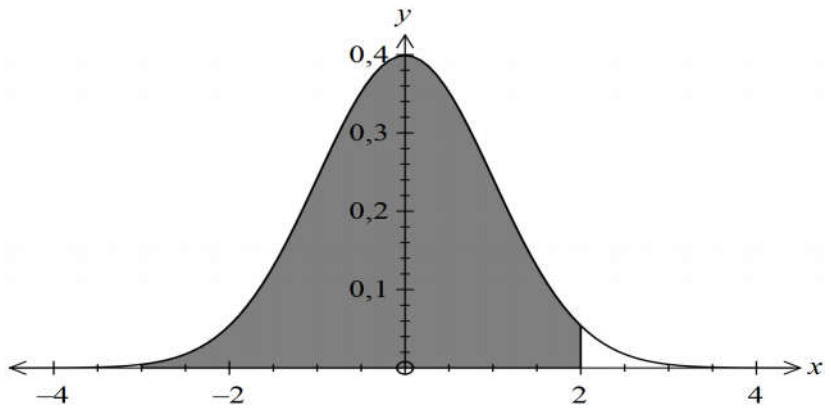
4- احتمـــــال أن يكـــــون العمـــــر الافتراضـــــي لمشـــــغل الأقـــــراص المرنـــــة

بين 700 ، 1200 ساعة

$$p(700 \le X \le 1200) = P\left(\frac{700-1000}{100} \le \frac{X-\mu}{\sigma} \le \frac{1200-1000}{100}\right)$$

$$= P\left(\frac{-300}{100} \le Z \le \frac{200}{100}\right) = P(-3 \le Z \le 2)$$

$$= P(-3 \le Z \le 0) + P(0 \le Z \le 2)$$
$$= P(0 \le Z \le 3) + P(0 \le Z \le 2)$$
$$= 0.4987 + 0.4772 = 0.9759$$

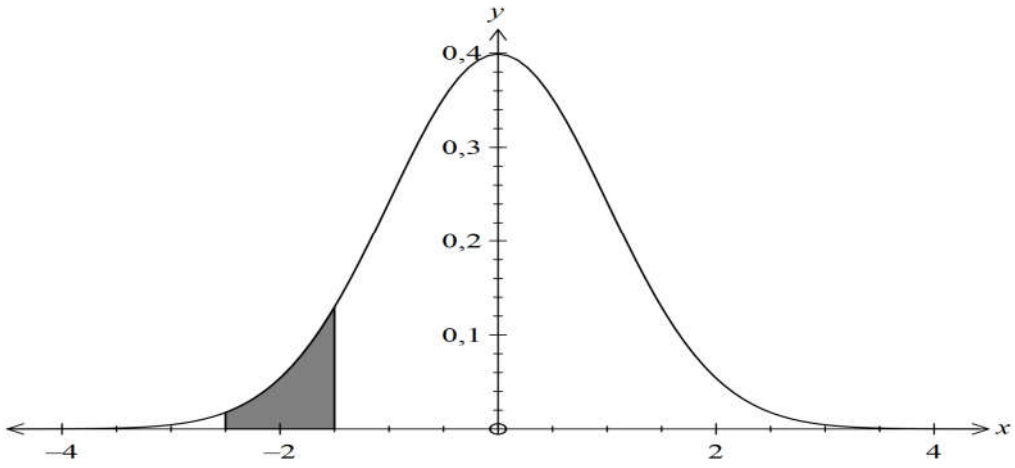


احتمـــــال أن يكـــــون العمـــــر الافتراضـــــي لمشـــــغل الأقـــــراص المرنـــــة

بين 750 ، 850 ساعة

$$P(750 \le X \le 850) = P\left(\frac{750-1000}{100} \le \frac{X-\mu}{\sigma} \le \frac{850-1000}{100}\right)$$

$$= P\left(\frac{-250}{100} \le Z \le \frac{-150}{100}\right)$$
$$= P(-2.50 \le Z \le -1.50)$$
$$= P(-2.50 \le Z \le 0) - P(-1.50 \le Z \le 0)$$
$$= P(0 \le Z \le 2.50) - P(0 \le Z \le 1.50)$$
$$= 0.4938 - 0.4332 = 0.0606$$



التوزيع الطبيعي كتقريب لتوزيع ذي الحدين : يمكن استخدام التوزيع الطبيعي كتقريب لتوزيع ذي الحدين إذا تحققت الشروط الآتية :

- حجم العينة يكون كبيرا ($n \ge 30$)
- المتوسط يكون أكبر من أو يساوى 5 ($\mu = np \ge 5$)
- التباين يكون أكبر من أو يساوى 5 ($\sigma^2 = np(1-p) \ge 5$)

مثـال تطبيقي (2)

إذا كانت نسبة الوحدات المعيبة المنتجة بواسطة إحدى الآلات هي 15% ، فإذا تم اختيار عينة حجمها 150 وحدة بطريقة عشوائية من إنتاج هذه الآلة . فاحسب احتمال أن تحتوى هذه العينة على :

1. أقل من 20 وحدة معيبة .
2. 20 وحدة معيبة على الأقل .
3. ما بين 15 ، 20 وحدة معيبة .
4. أكثر من 18 وحدة معيبة .
5. أكثر من 28 وحدة معيبة .

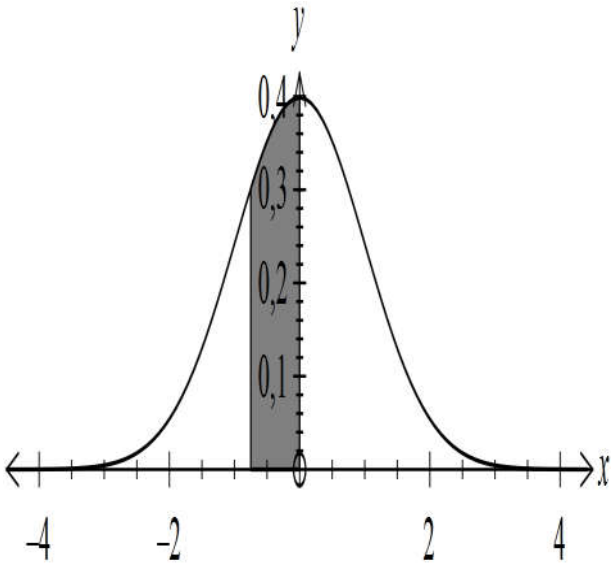
الحـل النموذجي للمثال:

نلاحظ أن شروط استخدام التوزيع الطبيعة كتقريب لتوزيع ذي الحدين متوفرة حيث أن :

$n = 150 > 30$	$\mu = np = 150 \times 0.15$ $= 22.5 > 5$	$\sigma 2 = np(1-p) = 150 \times 0.15 \times 0.85 = 19.125 > 5$

وعلى فرض أن المتغير العشوائي X يعبر عن عدد الوحدات المعيبة فإن الاحتمالات المطلوبة يمكن حسابها كالآتي :

احتمال أن تحتوى العينة على أقل من 20 وحدة معيبة

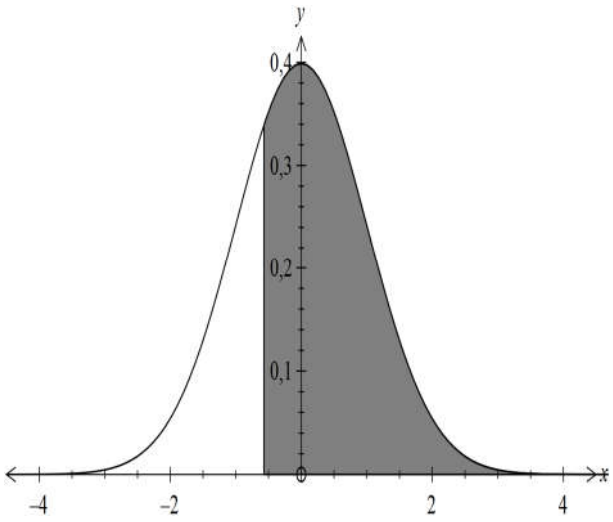


$$P(X<20)=P\left(\frac{X-\mu}{\sigma}<\frac{20-22.5}{4.4}\right)$$

$$=p\left(Z<\frac{-2.5}{4.4}\right)$$

$$=p(Z<-0.57)$$
$$=0.5-p(-0.57<Z<0)$$
$$=0.5-P(0<Z<0.57)$$
$$=0.5-0.2157=0.2843$$

احتمال أن تحتوى العينة على 20 وحدة معيبة على الأقل

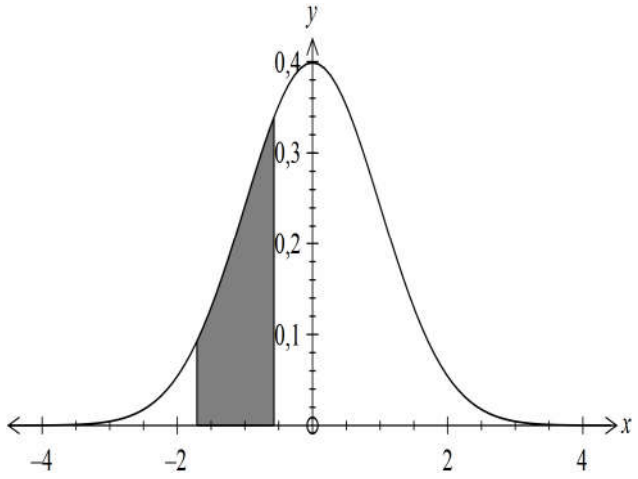


$$P(X\geq 20)=P(\frac{X-\mu}{\sigma}\geq\frac{20-22.5}{4.4})$$

$$=p(Z\geq -0.57)$$
$$=0.5+p(-0.57\leq Z\leq 0)$$

$$=0.5+P(0\leq Z\leq 0.57)$$
$$=0.5+0.2157=0.7157$$

احتمال أن تحتوى العينة على ما بين 15 ، 20 وحدة معيبة



$$P(15 \le X \le 20) =$$

$$P\left(\frac{15-22.5}{4.4} \le \frac{X-\mu}{\sigma} \le \frac{20-22.5}{4.4}\right)$$

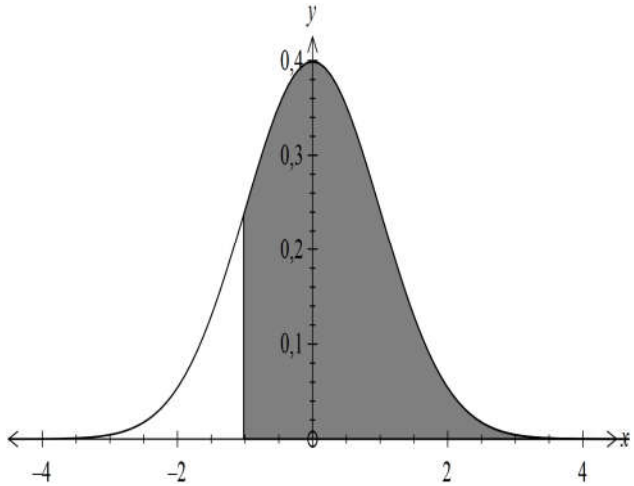
$$= P(-1.71 \le Z \le -0.57)$$

$$= P(-1.71 \le Z \le 0) - p(-0.57 \le Z \le 0)$$

$$= P(0 \le Z \le 1.71) - P(0 \le Z \le 0.57)$$

$$= 0.4564 - 0.2157 = 0.2407$$

احتمال أن تحتوى العينة على أكثر من 18 وحدة معيبة



$$P(X > 18) = P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} > \frac{18-22.5}{4.4}\right)$$

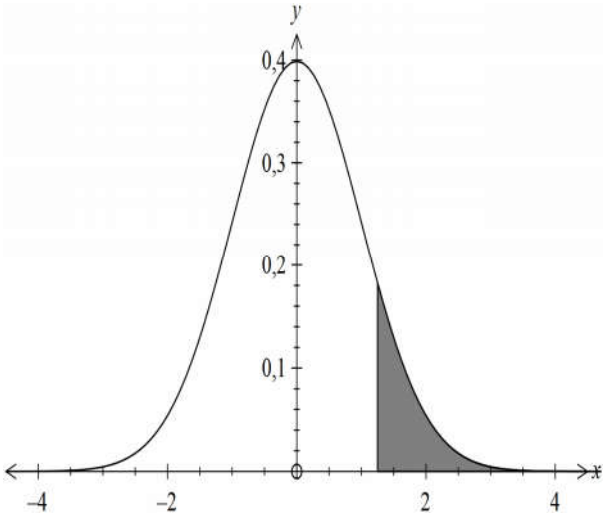
$$= P\left(Z > \frac{-4.5}{4.4}\right) = P(Z > -1.02)$$

$$= 0.5 + P(-1.02 < Z < 0)$$

$$= 0.5 + P(0 < Z < 1.02)$$

$$= 0.5 + 0.3461 = 0.8461$$

احتمال أن تحتوى العينة على أكثر من 28 وحدة معيبة



$$P(X > 28) = P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} > \frac{28-22.5}{4.4}\right)$$

$$= P\left(Z > \frac{5.5}{4.4}\right) = P(Z > 1.25)$$

$$= 0.5 - P(0 < Z < 1.25)$$

$$= 0.5 - 0.3944 = 0.1056$$

الخاتمة العامة

في هذه المطبوعة العلمية حاولنا قدر الإمكان تلخيص وتبسيط أهم المفاهيم الأولية لنظرية الاحتمالات مع التعريج على دراسة بعض التوزيعات الاحتمالية للمتغيرات العشوائية المنفصلة (المتقطعة) والمتصلة (المستمرة). نرجو أن يلبي هذا الإنتاج العلمي حاجة الطلبة في السنة الأولى جذع مشترك علوم اقتصادية وتجارية وعلوم التسيير على وجه الخصوص وكل مهتم بهذه النظرية وتطبيقاتها عموماً.

المجهود المبذول في إخراج هذه المطبوعة كان كبيراً ومُضنياً للباحث، ونرجوا من وراءه الإخلاص في سبيل العلم والعلم فقط، ورغم ذلك فهذا الكتيب العلمي هو قطرة في بحر علوم نظرية الاحتمالات والإحصاء الرياضي، والطالب مطالب بالإطلاع والبحث أكثر في أهم المراجع العربية والأجنبية الشاملة في هذا الموضوع.

لا ننسى فضل الأساتذة الأفاضل محكّمي هذه المطبوعة، الدكتور: "**قطوش عبد الحميد**" والدكتور" **مرابط ساعد**"، الذين بدلوا الجهد والوقت من اجل تقديم الملاحظات وتصويب الخطأ وإثراء المحتوى فلهم جزيل الشكر والامتنان، ونسأل الله أن يتقبل جهدهم ويبارك في علمهم وأوقاتهم.

قائمة المراجع

باللغة الأجنبية

1. Takács, L.: Combinatorics. In: Kotz, S., Johnson, N.L. (eds.) Encyclopedia of Statistical Sciences, vol2. Wiley, New York. (1982).
2. DESROCHES A., *Concepts et méthodes probabilistes de base de la sécurité*,

   Lavoisier, 1995.
3. DOOB J.L., *Stochastic processes*, John Wiley, 1953.
4. DYNKIN E.B., *Théorie des processus markoviens*, Dunod, 1963.
5. *Dictionnaire des mathématiques*, *Encyclopedia Universalis*, Albin Michel, 1998.
6. FOURGEAUD C., FUCHS A., *Statistique*, Dunod, 1967.
7. FORTET R., *Éléments de la théorie des probabilités*, CNRS, 1965.
8. LANG-MICHAUT C., *Pratique des tests statistiques : interprétation des données*, Dunod, 1990.

   LEBART L., MORINEAU A., FENELON J.P., *Traitement des données statistiques*, Dunod, 1979

باللغة العربية

9. صبري عزام، التحليل الاحصائي بين النظرية والتطبيق، الاردن-اربد 2003.

10. مُحَمَّد مُحَمَّد المزاح، مبادئ الإحصاء والاحتمالات، صنعاء 2008

11. صالح ابو عبد الله، الإحصاء الرياضي لطلبة العلوم الاقتصادية، 2006

المواقع الالكترونية

1. الاحتمالات الشرطية وبعض التعاريف من ملف مرفق تم تحميله من موقع www.lycee-maths-dz.org، الرابط بالتحديد هو : http://www.lycee-maths-dz.org/wp-content/uploads/2019/01/%D8%A7%D9%84%D8%A7%D8%AD%D8%AA%D9%85%D8%A7%D9%84%D8%A7%D8%AA-%D8%A7%D9%84%D8%B4%D8%B1%D8%B7%D9%8A1.doc

2. المتغيرات العشوائية: https://www.nagwa.com/ar/explainers/5041963531/ (بتصرف).

3. الموقع الالكتروني: www.mu.edu.sa

الملاحق

جدول دالة التوزيع الاحتمالية لقانون ثنائي الحدين

هذا الجدول يُعطي الاحتمالات المقابلة للحدث (أو الاحداث) العشوائية للحصول على نجاح من بين (x) تجربة عشوائية حيث لكل تجربة واحدة هناك (x) احتمال النجاح. واذا كان المتغير (x) يرمز لعدد النجاحات في هذه التجارب العشوائية. فالجدول يُعطينا القيم الاحتمالية للدالة نجاح

$$P(X \le x) = \sum_{r=0}^{x} C_r^n \, p^r \, (1-p)^{n-r}$$

$p=$		0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09	0.1	0.15	0.2	0.25	0.3	0.35	0.4	0.45	0.5
$n=2$	$x=0$	0.9801	0.9604	0.9409	0.9216	0.9025	0.8836	0.8649	0.8464	0.8281	0.8100	0.7225	0.6400	0.5625	0.4900	0.4225	0.3600	0.3025	0.2500
	1	0.9999	0.9996	0.9991	0.9984	0.9975	0.9964	0.9951	0.9936	0.9919	0.9900	0.9775	0.9600	0.9375	0.9100	0.8775	0.8400	0.7975	0.7500
	2	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
$n=3$	$x=0$	0.9703	0.9412	0.9127	0.8847	0.8574	0.8306	0.8044	0.7787	0.7536	0.7290	0.6141	0.5120	0.4219	0.3430	0.2746	0.2160	0.1664	0.1250
	1	0.9997	0.9988	0.9974	0.9953	0.9928	0.9896	0.9860	0.9818	0.9772	0.9720	0.9393	0.8960	0.8438	0.7840	0.7183	0.6480	0.5748	0.5000
	2	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9999	0.9998	0.9997	0.9995	0.9993	0.9990	0.9966	0.9920	0.9844	0.9730	0.9571	0.9360	0.9089	0.8750
	3	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
$n=4$	$x=0$	0.9606	0.9224	0.8853	0.8493	0.8145	0.7807	0.7481	0.7164	0.6857	0.6561	0.5220	0.4096	0.3164	0.2401	0.1785	0.1296	0.0915	0.0625
	1	0.9994	0.9977	0.9948	0.9909	0.9860	0.9801	0.9733	0.9656	0.9570	0.9477	0.8905	0.8192	0.7383	0.6517	0.5630	0.4752	0.3910	0.3125
	2	1.0000	1.0000	0.9999	0.9998	0.9995	0.9992	0.9987	0.9981	0.9973	0.9963	0.9880	0.9728	0.9492	0.9163	0.8735	0.8208	0.7585	0.6875
	3	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9999	0.9995	0.9984	0.9961	0.9919	0.9850	0.9744	0.9590	0.9375
	4	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
$n=5$	$x=0$	0.9510	0.9039	0.8587	0.8154	0.7738	0.7339	0.6957	0.6591	0.6240	0.5905	0.4437	0.3277	0.2373	0.1681	0.1160	0.0778	0.0503	0.0313
	1	0.9990	0.9962	0.9915	0.9852	0.9774	0.9681	0.9575	0.9456	0.9326	0.9185	0.8352	0.7373	0.6328	0.5282	0.4284	0.3370	0.2562	0.1875
	2	1.0000	0.9999	0.9997	0.9994	0.9988	0.9980	0.9969	0.9955	0.9937	0.9914	0.9734	0.9421	0.8965	0.8369	0.7648	0.6826	0.5931	0.5000
	3	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9999	0.9998	0.9997	0.9995	0.9978	0.9933	0.9844	0.9692	0.9460	0.9130	0.8688	0.8125
	4	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9997	0.9990	0.9976	0.9947	0.9898	0.9815	0.9688
	5	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
$n=6$	$x=0$	0.9415	0.8858	0.8330	0.7828	0.7351	0.6899	0.6470	0.6064	0.5679	0.5314	0.3771	0.2621	0.1780	0.1176	0.0754	0.0467	0.0277	0.0156
	1	0.9985	0.9943	0.9875	0.9784	0.9672	0.9541	0.9392	0.9227	0.9048	0.8857	0.7765	0.6554	0.5339	0.4202	0.3191	0.2333	0.1636	0.1094
	2	1.0000	0.9998	0.9995	0.9988	0.9978	0.9962	0.9942	0.9915	0.9882	0.9842	0.9527	0.9011	0.8306	0.7443	0.6471	0.5443	0.4415	0.3438
	3	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9998	0.9997	0.9995	0.9992	0.9987	0.9941	0.9830	0.9624	0.9295	0.8826	0.8208	0.7447	0.6563
	4	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9996	0.9984	0.9954	0.9891	0.9777	0.9590	0.9308	0.8906
	5	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9998	0.9993	0.9982	0.9959	0.9917	0.9844
	6	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

$p=$		0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09	0.1	0.15	0.2	0.25	0.3	0.35	0.4	0.45	0.5
$n=7$	$x=0$	0.9321	0.8681	0.8080	0.7514	0.6983	0.6485	0.6017	0.5578	0.5168	0.4783	0.3206	0.2097	0.1335	0.0824	0.0490	0.0280	0.0152	0.0078
	1	0.9980	0.9921	0.9829	0.9706	0.9556	0.9382	0.9187	0.8974	0.8745	0.8503	0.7166	0.5767	0.4449	0.3294	0.2338	0.1586	0.1024	0.0625
	2	1.0000	0.9997	0.9991	0.9980	0.9962	0.9937	0.9903	0.9860	0.9807	0.9743	0.9262	0.8520	0.7564	0.6471	0.5323	0.4199	0.3164	0.2266
	3	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9998	0.9996	0.9993	0.9988	0.9982	0.9973	0.9879	0.9667	0.9294	0.8740	0.8002	0.7102	0.6083	0.5000
	4	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9999	0.9998	0.9988	0.9953	0.9871	0.9712	0.9444	0.9037	0.8471	0.7734
	5	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9996	0.9987	0.9962	0.9910	0.9812	0.9643	0.9375
	6	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9998	0.9994	0.9984	0.9963	0.9922
	7	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
$n=8$	$x=0$	0.9227	0.8508	0.7837	0.7214	0.6634	0.6096	0.5596	0.5132	0.4703	0.4305	0.2725	0.1678	0.1001	0.0576	0.0319	0.0168	0.0084	0.0039
	1	0.9973	0.9897	0.9777	0.9619	0.9428	0.9208	0.8965	0.8702	0.8423	0.8131	0.6572	0.5033	0.3671	0.2553	0.1691	0.1064	0.0632	0.0352
	2	0.9999	0.9996	0.9987	0.9969	0.9942	0.9904	0.9853	0.9789	0.9711	0.9619	0.8948	0.7969	0.6785	0.5518	0.4278	0.3154	0.2201	0.1445
	3	1.0000	1.0000	0.9999	0.9998	0.9996	0.9993	0.9987	0.9978	0.9966	0.9950	0.9786	0.9437	0.8862	0.8059	0.7064	0.5941	0.4770	0.3633
	4	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9999	0.9997	0.9996	0.9971	0.9896	0.9727	0.9420	0.8939	0.8263	0.7396	0.6367
	5	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9998	0.9988	0.9958	0.9887	0.9747	0.9502	0.9115	0.8555
	6	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9996	0.9987	0.9964	0.9915	0.9819	0.9648
	7	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9998	0.9993	0.9983	0.9961
	8	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
$n=9$	$x=0$	0.9135	0.8337	0.7602	0.6925	0.6302	0.5730	0.5204	0.4722	0.4279	0.3874	0.2316	0.1342	0.0751	0.0404	0.0207	0.0101	0.0046	0.0020
	1	0.9966	0.9869	0.9718	0.9522	0.9288	0.9022	0.8729	0.8417	0.8088	0.7748	0.5995	0.4362	0.3003	0.1960	0.1211	0.0705	0.0385	0.0195
	2	0.9999	0.9994	0.9980	0.9955	0.9916	0.9862	0.9791	0.9702	0.9595	0.9470	0.8591	0.7382	0.6007	0.4628	0.3373	0.2318	0.1495	0.0898
	3	1.0000	1.0000	0.9999	0.9997	0.9994	0.9987	0.9977	0.9963	0.9943	0.9917	0.9661	0.9144	0.8343	0.7297	0.6089	0.4826	0.3614	0.2539
	4	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9998	0.9997	0.9995	0.9991	0.9944	0.9804	0.9511	0.9012	0.8283	0.7334	0.6214	0.5000
	5	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9994	0.9969	0.9900	0.9747	0.9464	0.9006	0.8342	0.7461
	6	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9997	0.9987	0.9957	0.9888	0.9750	0.9502	0.9102
	7	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9996	0.9986	0.9962	0.9909	0.9805
	8	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9997	0.9992	0.9980
	9	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
$n=10$	$x=0$	0.9044	0.8171	0.7374	0.6648	0.5987	0.5386	0.4840	0.4344	0.3894	0.3487	0.1969	0.1074	0.0563	0.0282	0.0135	0.0060	0.0025	0.0010
	1	0.9957	0.9838	0.9655	0.9418	0.9139	0.8824	0.8483	0.8121	0.7746	0.7361	0.5443	0.3758	0.2440	0.1493	0.0860	0.0464	0.0233	0.0107
	2	0.9999	0.9991	0.9972	0.9938	0.9885	0.9812	0.9717	0.9599	0.9460	0.9298	0.8202	0.6778	0.5256	0.3828	0.2616	0.1673	0.0996	0.0547
	3	1.0000	1.0000	0.9999	0.9996	0.9990	0.9980	0.9964	0.9942	0.9912	0.9872	0.9500	0.8791	0.7759	0.6496	0.5138	0.3823	0.2660	0.1719
	4	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9998	0.9997	0.9994	0.9990	0.9984	0.9901	0.9672	0.9219	0.8497	0.7515	0.6331	0.5044	0.3770
	5	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9999	0.9986	0.9936	0.9803	0.9527	0.9051	0.8338	0.7384	0.6230
	6	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9991	0.9965	0.9894	0.9740	0.9452	0.8980	0.8281
	7	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9996	0.9984	0.9952	0.9877	0.9726	0.9453
	8	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9995	0.9983	0.9955	0.9893
	9	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9997	0.9990
	10	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

p=		0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09	0.1	0.15	0.2	0.25	0.3	0.35	0.4	0.45	0.5
***n*= 11**	***x*= 0**	0.8953	0.8007	0.7153	0.6382	0.5688	0.5063	0.4501	0.3996	0.3544	0.3138	0.1673	0.0859	0.0422	0.0198	0.0088	0.0036	0.0014	0.0005
	1	0.9948	0.9805	0.9587	0.9308	0.8981	0.8618	0.8228	0.7819	0.7399	0.6974	0.4922	0.3221	0.1971	0.1130	0.0606	0.0302	0.0139	0.0059
	2	0.9998	0.9988	0.9963	0.9917	0.9848	0.9752	0.9630	0.9481	0.9305	0.9104	0.7788	0.6174	0.4552	0.3127	0.2001	0.1189	0.0652	0.0327
	3	1.0000	1.0000	0.9998	0.9993	0.9984	0.9970	0.9947	0.9915	0.9871	0.9815	0.9306	0.8389	0.7133	0.5696	0.4256	0.2963	0.1911	0.1133
	4	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9997	0.9995	0.9990	0.9983	0.9972	0.9841	0.9496	0.8854	0.7897	0.6683	0.5328	0.3971	0.2744
	5	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9998	0.9997	0.9973	0.9883	0.9657	0.9218	0.8513	0.7535	0.6331	0.5000
	6	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9997	0.9980	0.9924	0.9784	0.9499	0.9006	0.8262	0.7256
	7	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9998	0.9988	0.9957	0.9878	0.9707	0.9390	0.8867
	8	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9994	0.9980	0.9941	0.9852	0.9673
	9	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9998	0.9993	0.9978	0.9941
	10	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9998	0.9995
	11	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
***n*= 12**	***x*= 0**	0.8864	0.7847	0.6938	0.6127	0.5404	0.4759	0.4186	0.3677	0.3225	0.2824	0.1422	0.0687	0.0317	0.0138	0.0057	0.0022	0.0008	0.0002
	1	0.9938	0.9769	0.9514	0.9191	0.8816	0.8405	0.7967	0.7513	0.7052	0.6590	0.4435	0.2749	0.1584	0.0850	0.0424	0.0196	0.0083	0.0032
	2	0.9998	0.9985	0.9952	0.9893	0.9804	0.9684	0.9532	0.9348	0.9134	0.8891	0.7358	0.5583	0.3907	0.2528	0.1513	0.0834	0.0421	0.0193
	3	1.0000	0.9999	0.9997	0.9990	0.9978	0.9957	0.9925	0.9880	0.9820	0.9744	0.9078	0.7946	0.6488	0.4925	0.3467	0.2253	0.1345	0.0730
	4	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9998	0.9996	0.9991	0.9984	0.9973	0.9957	0.9761	0.9274	0.8424	0.7237	0.5833	0.4382	0.3044	0.1938
	5	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9998	0.9997	0.9995	0.9954	0.9806	0.9456	0.8822	0.7873	0.6652	0.5269	0.3872
	6	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9993	0.9961	0.9857	0.9614	0.9154	0.8418	0.7393	0.6128
	7	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9994	0.9972	0.9905	0.9745	0.9427	0.8883	0.8062
	8	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9996	0.9983	0.9944	0.9847	0.9644	0.9270
	9	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9998	0.9992	0.9972	0.9921	0.9807
	10	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9997	0.9989	0.9968
	11	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9998
	12	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
***n*= 13**	***x*= 0**	0.8775	0.7690	0.6730	0.5882	0.5133	0.4474	0.3893	0.3383	0.2935	0.2542	0.1209	0.0550	0.0238	0.0097	0.0037	0.0013	0.0004	0.0001
	1	0.9928	0.9730	0.9436	0.9068	0.8646	0.8186	0.7702	0.7206	0.6707	0.6213	0.3983	0.2336	0.1267	0.0637	0.0296	0.0126	0.0049	0.0017
	2	0.9997	0.9980	0.9938	0.9865	0.9755	0.9608	0.9422	0.9201	0.8946	0.8661	0.6920	0.5017	0.3326	0.2025	0.1132	0.0579	0.0269	0.0112
	3	1.0000	0.9999	0.9995	0.9986	0.9969	0.9940	0.9897	0.9837	0.9758	0.9658	0.8820	0.7473	0.5843	0.4206	0.2783	0.1686	0.0929	0.0461
	4	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9997	0.9993	0.9987	0.9976	0.9959	0.9935	0.9658	0.9009	0.7940	0.6543	0.5005	0.3530	0.2279	0.1334
	5	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9999	0.9997	0.9995	0.9991	0.9925	0.9700	0.9198	0.8346	0.7159	0.5744	0.4268	0.2905
	6	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9999	0.9987	0.9930	0.9757	0.9376	0.8705	0.7712	0.6437	0.5000
	7	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9998	0.9988	0.9944	0.9818	0.9538	0.9023	0.8212	0.7095
	8	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9998	0.9990	0.9960	0.9874	0.9679	0.9302	0.8666
	9	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9993	0.9975	0.9922	0.9797	0.9539
	10	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9997	0.9987	0.9959	0.9888
	11	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9995	0.9983
	12	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999
	13	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

$p=$		0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09	0.1	0.15	0.2	0.25	0.3	0.35	0.4	0.45	0.5
$n=14$	$x=0$	0.8687	0.7536	0.6528	0.5647	0.4877	0.4205	0.3620	0.3112	0.2670	0.2288	0.1028	0.0440	0.0178	0.0068	0.0024	0.0008	0.0002	0.0001
	1	0.9916	0.9690	0.9355	0.8941	0.8470	0.7963	0.7436	0.6900	0.6368	0.5846	0.3567	0.1979	0.1010	0.0475	0.0205	0.0081	0.0029	0.0009
	2	0.9997	0.9975	0.9923	0.9833	0.9699	0.9522	0.9302	0.9042	0.8745	0.8416	0.6479	0.4481	0.2811	0.1608	0.0839	0.0398	0.0170	0.0065
	3	1.0000	0.9999	0.9994	0.9981	0.9958	0.9920	0.9864	0.9786	0.9685	0.9559	0.8535	0.6982	0.5213	0.3552	0.2205	0.1243	0.0632	0.0287
	4	1.0000	1.0000	1.0000	0.9998	0.9996	0.9990	0.9980	0.9965	0.9941	0.9908	0.9533	0.8702	0.7415	0.5842	0.4227	0.2793	0.1672	0.0898
	5	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9998	0.9996	0.9992	0.9985	0.9885	0.9561	0.8883	0.7805	0.6405	0.4859	0.3373	0.2120
	6	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9998	0.9978	0.9884	0.9617	0.9067	0.8164	0.6925	0.5461	0.3953
	7	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9997	0.9976	0.9897	0.9685	0.9247	0.8499	0.7414	0.6047
	8	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9996	0.9978	0.9917	0.9757	0.9417	0.8811	0.7880
	9	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9997	0.9983	0.9940	0.9825	0.9574	0.9102
	10	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9998	0.9989	0.9961	0.9886	0.9713
	11	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9994	0.9978	0.9935
	12	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9997	0.9991
	13	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999
	14	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
$n=15$	$x=0$	0.8601	0.7386	0.6333	0.5421	0.4633	0.3953	0.3367	0.2863	0.2430	0.2059	0.0874	0.0352	0.0134	0.0047	0.0016	0.0005	0.0001	0.0000
	1	0.9904	0.9647	0.9270	0.8809	0.8290	0.7738	0.7168	0.6597	0.6035	0.5490	0.3186	0.1671	0.0802	0.0353	0.0142	0.0052	0.0017	0.0005
	2	0.9996	0.9970	0.9906	0.9797	0.9638	0.9429	0.9171	0.8870	0.8531	0.8159	0.6042	0.3980	0.2361	0.1268	0.0617	0.0271	0.0107	0.0037
	3	1.0000	0.9998	0.9992	0.9976	0.9945	0.9896	0.9825	0.9727	0.9601	0.9444	0.8227	0.6482	0.4613	0.2969	0.1727	0.0905	0.0424	0.0176
	4	1.0000	1.0000	0.9999	0.9998	0.9994	0.9986	0.9972	0.9950	0.9918	0.9873	0.9383	0.8358	0.6865	0.5155	0.3519	0.2173	0.1204	0.0592
	5	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9999	0.9997	0.9993	0.9987	0.9978	0.9832	0.9389	0.8516	0.7216	0.5643	0.4032	0.2608	0.1509
	6	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9998	0.9997	0.9964	0.9819	0.9434	0.8689	0.7548	0.6098	0.4522	0.3036
	7	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9994	0.9958	0.9827	0.9500	0.8868	0.7869	0.6535	0.5000
	8	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9992	0.9958	0.9848	0.9578	0.9050	0.8182	0.6964
	9	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9992	0.9963	0.9876	0.9662	0.9231	0.8491
	10	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9993	0.9972	0.9907	0.9745	0.9408
	11	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9995	0.9981	0.9937	0.9824
	12	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9997	0.9989	0.9963
	13	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9995
	14	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
	15	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
$n=20$	$x=0$	0.8179	0.6676	0.5438	0.4420	0.3585	0.2901	0.2342	0.1887	0.1516	0.1216	0.0388	0.0115	0.0032	0.0008	0.0002	0.0000	0.0000	0.0000
	1	0.9831	0.9401	0.8802	0.8103	0.7358	0.6605	0.5869	0.5169	0.4516	0.3917	0.1756	0.0692	0.0243	0.0076	0.0021	0.0005	0.0001	0.0000
	2	0.9990	0.9929	0.9790	0.9561	0.9245	0.8850	0.8390	0.7879	0.7334	0.6769	0.4049	0.2061	0.0913	0.0355	0.0121	0.0036	0.0009	0.0002
	3	1.0000	0.9994	0.9973	0.9926	0.9841	0.9710	0.9529	0.9294	0.9007	0.8670	0.6477	0.4114	0.2252	0.1071	0.0444	0.0160	0.0049	0.0013
	4	1.0000	1.0000	0.9997	0.9990	0.9974	0.9944	0.9893	0.9817	0.9710	0.9568	0.8298	0.6296	0.4148	0.2375	0.1182	0.0510	0.0189	0.0059
	5	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9997	0.9991	0.9981	0.9962	0.9932	0.9887	0.9327	0.8042	0.6172	0.4164	0.2454	0.1256	0.0553	0.0207
	6	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9997	0.9994	0.9987	0.9976	0.9781	0.9133	0.7858	0.6080	0.4166	0.2500	0.1299	0.0577
	7	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9998	0.9996	0.9941	0.9679	0.8982	0.7723	0.6010	0.4159	0.2520	0.1316

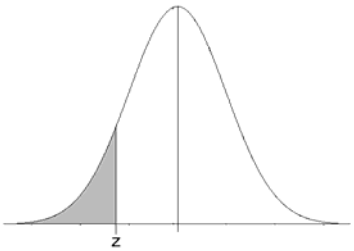
p=		0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09	0.1	0.15	0.2	0.25	0.3	0.35	0.4	0.45	0.5
***n*= 20**	***x*= 8**	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9987	0.9900	0.9591	0.8867	0.7624	0.5956	0.4143	0.2517
	9	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9998	0.9974	0.9861	0.9520	0.8782	0.7553	0.5914	0.4119
	10	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9994	0.9961	0.9829	0.9468	0.8725	0.7507	0.5881
	11	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9991	0.9949	0.9804	0.9435	0.8692	0.7483
	12	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9998	0.9987	0.9940	0.9790	0.9420	0.8684
	13	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9997	0.9985	0.9935	0.9786	0.9423
	14	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9997	0.9984	0.9936	0.9793
	15	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9997	0.9985	0.9941
	16	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9997	0.9987
	17	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9998
	18	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
***n*= 25**	***x*= 0**	0.7778	0.6035	0.4670	0.3604	0.2774	0.2129	0.1630	0.1244	0.0946	0.0718	0.0172	0.0038	0.0008	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
	1	0.9742	0.9114	0.8280	0.7358	0.6424	0.5527	0.4696	0.3947	0.3286	0.2712	0.0931	0.0274	0.0070	0.0016	0.0003	0.0001	0.0000	0.0000
	2	0.9980	0.9868	0.9620	0.9235	0.8729	0.8129	0.7466	0.6768	0.6063	0.5371	0.2537	0.0982	0.0321	0.0090	0.0021	0.0004	0.0001	0.0000
	3	0.9999	0.9986	0.9938	0.9835	0.9659	0.9402	0.9064	0.8649	0.8169	0.7636	0.4711	0.2340	0.0962	0.0332	0.0097	0.0024	0.0005	0.0001
	4	1.0000	0.9999	0.9992	0.9972	0.9928	0.9850	0.9726	0.9549	0.9314	0.9020	0.6821	0.4207	0.2137	0.0905	0.0320	0.0095	0.0023	0.0005
	5	1.0000	1.0000	0.9999	0.9996	0.9988	0.9969	0.9935	0.9877	0.9790	0.9666	0.8385	0.6167	0.3783	0.1935	0.0826	0.0294	0.0086	0.0020
	6	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9998	0.9995	0.9987	0.9972	0.9946	0.9905	0.9305	0.7800	0.5611	0.3407	0.1734	0.0736	0.0258	0.0073
	7	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9998	0.9995	0.9989	0.9977	0.9745	0.8909	0.7265	0.5118	0.3061	0.1536	0.0639	0.0216
	8	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9998	0.9995	0.9920	0.9532	0.8506	0.6769	0.4668	0.2735	0.1340	0.0539
	9	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9979	0.9827	0.9287	0.8106	0.6303	0.4246	0.2424	0.1148
	10	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9995	0.9944	0.9703	0.9022	0.7712	0.5858	0.3843	0.2122
	11	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9985	0.9893	0.9558	0.8746	0.7323	0.5426	0.3450
	12	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9996	0.9966	0.9825	0.9396	0.8462	0.6937	0.5000
	13	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9991	0.9940	0.9745	0.9222	0.8173	0.6550
	14	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9998	0.9982	0.9907	0.9656	0.9040	0.7878
	15	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9995	0.9971	0.9868	0.9560	0.8852
	16	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9992	0.9957	0.9826	0.9461
	17	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9998	0.9988	0.9942	0.9784
	18	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9997	0.9984	0.9927
	19	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9996	0.9980
	20	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9995
	21	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999
	22	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
***n*= 30**	***x*= 0**	0.7397	0.5455	0.4010	0.2939	0.2146	0.1563	0.1134	0.0820	0.0591	0.0424	0.0076	0.0012	0.0002	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
	1	0.9639	0.8795	0.7731	0.6612	0.5535	0.4555	0.3694	0.2958	0.2343	0.1837	0.0480	0.0105	0.0020	0.0003	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
	2	0.9967	0.9783	0.9399	0.8831	0.8122	0.7324	0.6487	0.5654	0.4855	0.4114	0.1514	0.0442	0.0106	0.0021	0.0003	0.0000	0.0000	0.0000
	3	0.9998	0.9971	0.9881	0.9694	0.9392	0.8974	0.8450	0.7842	0.7175	0.6474	0.3217	0.1227	0.0374	0.0093	0.0019	0.0003	0.0000	0.0000
	4	1.0000	0.9997	0.9982	0.9937	0.9844	0.9685	0.9447	0.9126	0.8723	0.8245	0.5245	0.2552	0.0979	0.0302	0.0075	0.0015	0.0002	0.0000

p=		0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09	0.1	0.15	0.2	0.25	0.3	0.35	0.4	0.45	0.5
***n*= 30**	***x*= 5**	1.0000	1.0000	0.9998	0.9989	0.9967	0.9921	0.9838	0.9707	0.9519	0.9268	0.7106	0.4275	0.2026	0.0766	0.0233	0.0057	0.0011	0.0002
	6	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9994	0.9983	0.9960	0.9918	0.9848	0.9742	0.8474	0.6070	0.3481	0.1595	0.0586	0.0172	0.0040	0.0007
	7	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9997	0.9992	0.9980	0.9959	0.9922	0.9302	0.7608	0.5143	0.2814	0.1238	0.0435	0.0121	0.0026
	8	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9996	0.9990	0.9980	0.9722	0.8713	0.6736	0.4315	0.2247	0.0940	0.0312	0.0081
	9	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9998	0.9995	0.9903	0.9389	0.8034	0.5888	0.3575	0.1763	0.0694	0.0214
	10	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9971	0.9744	0.8943	0.7304	0.5078	0.2915	0.1350	0.0494
	11	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9992	0.9905	0.9493	0.8407	0.6548	0.4311	0.2327	0.1002
	12	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9998	0.9969	0.9784	0.9155	0.7802	0.5785	0.3592	0.1808
	13	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9991	0.9918	0.9599	0.8737	0.7145	0.5025	0.2923
	14	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9998	0.9973	0.9831	0.9348	0.8246	0.6448	0.4278
	15	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9992	0.9936	0.9699	0.9029	0.7691	0.5722
	16	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9998	0.9979	0.9876	0.9519	0.8644	0.7077
	17	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9994	0.9955	0.9788	0.9286	0.8192
	18	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9998	0.9986	0.9917	0.9666	0.8998
	19	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9996	0.9971	0.9862	0.9506
	20	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9991	0.9950	0.9786
	21	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9998	0.9984	0.9919
	22	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9996	0.9974
	23	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9993
	24	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9998
	25	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
***n*= 40**	***x*= 0**	0.6690	0.4457	0.2957	0.1954	0.1285	0.0842	0.0549	0.0356	0.0230	0.0148	0.0015	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
	1	0.9393	0.8095	0.6615	0.5210	0.3991	0.2990	0.2201	0.1594	0.1140	0.0805	0.0121	0.0015	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
	2	0.9925	0.9543	0.8822	0.7855	0.6767	0.5665	0.4625	0.3694	0.2894	0.2228	0.0486	0.0079	0.0010	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
	3	0.9993	0.9918	0.9686	0.9252	0.8619	0.7827	0.6937	0.6007	0.5092	0.4231	0.1302	0.0285	0.0047	0.0006	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000
	4	1.0000	0.9988	0.9933	0.9790	0.9520	0.9104	0.8546	0.7868	0.7103	0.6290	0.2633	0.0759	0.0160	0.0026	0.0003	0.0000	0.0000	0.0000
	5	1.0000	0.9999	0.9988	0.9951	0.9861	0.9691	0.9419	0.9033	0.8535	0.7937	0.4325	0.1613	0.0433	0.0086	0.0013	0.0001	0.0000	0.0000
	6	1.0000	1.0000	0.9998	0.9990	0.9966	0.9909	0.9801	0.9624	0.9361	0.9005	0.6067	0.2859	0.0962	0.0238	0.0044	0.0006	0.0001	0.0000
	7	1.0000	1.0000	1.0000	0.9998	0.9993	0.9977	0.9942	0.9873	0.9758	0.9581	0.7559	0.4371	0.1820	0.0553	0.0124	0.0021	0.0002	0.0000
	8	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9995	0.9985	0.9963	0.9919	0.9845	0.8646	0.5931	0.2998	0.1110	0.0303	0.0061	0.0009	0.0001
	9	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9997	0.9990	0.9976	0.9949	0.9328	0.7318	0.4395	0.1959	0.0644	0.0156	0.0027	0.0003
***n*= 40**	***x*= 10**	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9998	0.9994	0.9985	0.9701	0.8392	0.5839	0.3087	0.1215	0.0352	0.0074	0.0011
	11	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9996	0.9880	0.9125	0.7151	0.4406	0.2053	0.0709	0.0179	0.0032
	12	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9957	0.9568	0.8209	0.5772	0.3143	0.1285	0.0386	0.0083
	13	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9986	0.9806	0.8968	0.7032	0.4408	0.2112	0.0751	0.0192
	14	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9996	0.9921	0.9456	0.8074	0.5721	0.3174	0.1326	0.0403
	15	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9971	0.9738	0.8849	0.6946	0.4402	0.2142	0.0769
	16	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9990	0.9884	0.9367	0.7978	0.5681	0.3185	0.1341
	17	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9997	0.9953	0.9680	0.8761	0.6885	0.4391	0.2148

p=		0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09	0.1	0.15	0.2	0.25	0.3	0.35	0.4	0.45	0.5
n= 40	*x*= 18	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9983	0.9852	0.9301	0.7911	0.5651	0.3179
	19	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9994	0.9937	0.9637	0.8702	0.6844	0.4373
	20	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9998	0.9976	0.9827	0.9256	0.7870	0.5627
	21	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9991	0.9925	0.9608	0.8669	0.6821
	22	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9997	0.9970	0.9811	0.9233	0.7852
	23	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9989	0.9917	0.9595	0.8659
	24	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9996	0.9966	0.9804	0.9231
	25	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9988	0.9914	0.9597
	26	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9996	0.9966	0.9808
	27	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9988	0.9917
	28	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9996	0.9968
	29	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9989
	30	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9997
	31	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999
	32	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
n= 50	*x*= 0	0.6050	0.3642	0.2181	0.1299	0.0769	0.0453	0.0266	0.0155	0.0090	0.0052	0.0003	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
	1	0.9106	0.7358	0.5553	0.4005	0.2794	0.1900	0.1265	0.0827	0.0532	0.0338	0.0029	0.0002	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
	2	0.9862	0.9216	0.8108	0.6767	0.5405	0.4162	0.3108	0.2260	0.1605	0.1117	0.0142	0.0013	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
	3	0.9984	0.9822	0.9372	0.8609	0.7604	0.6473	0.5327	0.4253	0.3303	0.2503	0.0460	0.0057	0.0005	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
	4	0.9999	0.9968	0.9832	0.9510	0.8964	0.8206	0.7290	0.6290	0.5277	0.4312	0.1121	0.0185	0.0021	0.0002	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
	5	1.0000	0.9995	0.9963	0.9856	0.9622	0.9224	0.8650	0.7919	0.7072	0.6161	0.2194	0.0480	0.0070	0.0007	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000
	6	1.0000	0.9999	0.9993	0.9964	0.9882	0.9711	0.9417	0.8981	0.8404	0.7702	0.3613	0.1034	0.0194	0.0025	0.0002	0.0000	0.0000	0.0000
	7	1.0000	1.0000	0.9999	0.9992	0.9968	0.9906	0.9780	0.9562	0.9232	0.8779	0.5188	0.1904	0.0453	0.0073	0.0008	0.0001	0.0000	0.0000
	8	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9992	0.9973	0.9927	0.9833	0.9672	0.9421	0.6681	0.3073	0.0916	0.0183	0.0025	0.0002	0.0000	0.0000
	9	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9998	0.9993	0.9978	0.9944	0.9875	0.9755	0.7911	0.4437	0.1637	0.0402	0.0067	0.0008	0.0001	0.0000
	10	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9998	0.9994	0.9983	0.9957	0.9906	0.8801	0.5836	0.2622	0.0789	0.0160	0.0022	0.0002	0.0000
	11	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9995	0.9987	0.9968	0.9372	0.7107	0.3816	0.1390	0.0342	0.0057	0.0006	0.0000
	12	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9996	0.9990	0.9699	0.8139	0.5110	0.2229	0.0661	0.0133	0.0018	0.0002
	13	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9997	0.9868	0.8894	0.6370	0.3279	0.1163	0.0280	0.0045	0.0005
	14	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9947	0.9393	0.7481	0.4468	0.1878	0.0540	0.0104	0.0013
	15	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9981	0.9692	0.8369	0.5692	0.2801	0.0955	0.0220	0.0033
	16	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9993	0.9856	0.9017	0.6839	0.3889	0.1561	0.0427	0.0077
n= 50	*x*= 17	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9998	0.9937	0.9449	0.7822	0.5060	0.2369	0.0765	0.0164
	18	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9975	0.9713	0.8594	0.6216	0.3356	0.1273	0.0325
	19	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9991	0.9861	0.9152	0.7264	0.4465	0.1974	0.0595
	20	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9997	0.9937	0.9522	0.8139	0.5610	0.2862	0.1013
	21	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9974	0.9749	0.8813	0.6701	0.3900	0.1611
	22	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9990	0.9877	0.9290	0.7660	0.5019	0.2399
	23	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9996	0.9944	0.9604	0.8438	0.6134	0.3359

p=		0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09	0.1	0.15	0.2	0.25	0.3	0.35	0.4	0.45	0.5
***n*= 50**	***x*= 24**	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9976	0.9793	0.9022	0.7160	0.4439
	25	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9991	0.9900	0.9427	0.8034	0.5561
	26	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9997	0.9955	0.9686	0.8721	0.6641
	27	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9981	0.9840	0.9220	0.7601
	28	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9993	0.9924	0.9556	0.8389
	29	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9997	0.9966	0.9765	0.8987
	30	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9986	0.9884	0.9405
	31	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9995	0.9947	0.9675
	32	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9998	0.9978	0.9836
	33	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9991	0.9923
	34	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9997	0.9967
	35	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9987
	36	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9995
	37	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9998
	38	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

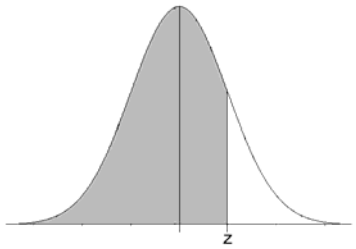
جدول دالة التوزيع الاحتمالية للقانون الطبيعي المعياري



Cumulative probabilities for NEGATIVE z-values are shown in the following table:

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
-3.4	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0002
-3.3	0.0005	0.0005	0.0005	0.0004	0.0004	0.0004	0.0004	0.0004	0.0004	0.0003
-3.2	0.0007	0.0007	0.0006	0.0006	0.0006	0.0006	0.0006	0.0005	0.0005	0.0005
-3.1	0.0010	0.0009	0.0009	0.0009	0.0008	0.0008	0.0008	0.0008	0.0007	0.0007
-3.0	0.0013	0.0013	0.0013	0.0012	0.0012	0.0011	0.0011	0.0011	0.0010	0.0010
-2.9	0.0019	0.0018	0.0018	0.0017	0.0016	0.0016	0.0015	0.0015	0.0014	0.0014
-2.8	0.0026	0.0025	0.0024	0.0023	0.0023	0.0022	0.0021	0.0021	0.0020	0.0019
-2.7	0.0035	0.0034	0.0033	0.0032	0.0031	0.0030	0.0029	0.0028	0.0027	0.0026
-2.6	0.0047	0.0045	0.0044	0.0043	0.0041	0.0040	0.0039	0.0038	0.0037	0.0036
-2.5	0.0062	0.0060	0.0059	0.0057	0.0055	0.0054	0.0052	0.0051	0.0049	0.0048
-2.4	0.0082	0.0080	0.0078	0.0075	0.0073	0.0071	0.0069	0.0068	0.0066	0.0064
-2.3	0.0107	0.0104	0.0102	0.0099	0.0096	0.0094	0.0091	0.0089	0.0087	0.0084
-2.2	0.0139	0.0136	0.0132	0.0129	0.0125	0.0122	0.0119	0.0116	0.0113	0.0110
-2.1	0.0179	0.0174	0.0170	0.0166	0.0162	0.0158	0.0154	0.0150	0.0146	0.0143
-2.0	0.0228	0.0222	0.0217	0.0212	0.0207	0.0202	0.0197	0.0192	0.0188	0.0183
-1.9	0.0287	0.0281	0.0274	0.0268	0.0262	0.0256	0.0250	0.0244	0.0239	0.0233
-1.8	0.0359	0.0351	0.0344	0.0336	0.0329	0.0322	0.0314	0.0307	0.0301	0.0294
-1.7	0.0446	0.0436	0.0427	0.0418	0.0409	0.0401	0.0392	0.0384	0.0375	0.0367
-1.6	0.0548	0.0537	0.0526	0.0516	0.0505	0.0495	0.0485	0.0475	0.0465	0.0455
-1.5	0.0668	0.0655	0.0643	0.0630	0.0618	0.0606	0.0594	0.0582	0.0571	0.0559
-1.4	0.0808	0.0793	0.0778	0.0764	0.0749	0.0735	0.0721	0.0708	0.0694	0.0681
-1.3	0.0968	0.0951	0.0934	0.0918	0.0901	0.0885	0.0869	0.0853	0.0838	0.0823
-1.2	0.1151	0.1131	0.1112	0.1093	0.1075	0.1056	0.1038	0.1020	0.1003	0.0985
-1.1	0.1357	0.1335	0.1314	0.1292	0.1271	0.1251	0.1230	0.1210	0.1190	0.1170
-1.0	0.1587	0.1562	0.1539	0.1515	0.1492	0.1469	0.1446	0.1423	0.1401	0.1379
-0.9	0.1841	0.1814	0.1788	0.1762	0.1736	0.1711	0.1685	0.1660	0.1635	0.1611
-0.8	0.2119	0.2090	0.2061	0.2033	0.2005	0.1977	0.1949	0.1922	0.1894	0.1867
-0.7	0.2420	0.2389	0.2358	0.2327	0.2296	0.2266	0.2236	0.2206	0.2177	0.2148
-0.6	0.2743	0.2709	0.2676	0.2643	0.2611	0.2578	0.2546	0.2514	0.2483	0.2451
-0.5	0.3085	0.3050	0.3015	0.2981	0.2946	0.2912	0.2877	0.2843	0.2810	0.2776
-0.4	0.3446	0.3409	0.3372	0.3336	0.3300	0.3264	0.3228	0.3192	0.3156	0.3121
-0.3	0.3821	0.3783	0.3745	0.3707	0.3669	0.3632	0.3594	0.3557	0.3520	0.3483
-0.2	0.4207	0.4168	0.4129	0.4090	0.4052	0.4013	0.3974	0.3936	0.3897	0.3859
-0.1	0.4602	0.4562	0.4522	0.4483	0.4443	0.4404	0.4364	0.4325	0.4286	0.4247
0.0	0.5000	0.4960	0.4920	0.4880	0.4840	0.4801	0.4761	0.4721	0.4681	0.4641

جدول دالة التوزيع الاحتمالية للقانون الطبيعي المعياري



Cumulative probabilities for POSITIVE z-values are shown in the following table:

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998

جدول دالة التوزيع الاحتمالية لقانون بواسون

The table below gives the probability of that a Poisson random variable X with mean = λ is less than or equal to x. That is, the table gives

$$P(X \le x) = \sum_{r=0}^{x} l^{r} \frac{e^{-l}}{r!}$$

λ=		0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0	1.2	1.4	1.6	1.8
x=	0	0.9048	0.8187	0.7408	0.6703	0.6065	0.5488	0.4966	0.4493	0.4066	0.3679	0.3012	0.2466	0.2019	0.1653
	1	0.9953	0.9825	0.9631	0.9384	0.9098	0.8781	0.8442	0.8088	0.7725	0.7358	0.6626	0.5918	0.5249	0.4628
	2	0.9998	0.9989	0.9964	0.9921	0.9856	0.9769	0.9659	0.9526	0.9371	0.9197	0.8795	0.8335	0.7834	0.7306
	3	1.0000	0.9999	0.9997	0.9992	0.9982	0.9966	0.9942	0.9909	0.9865	0.9810	0.9662	0.9463	0.9212	0.8913
	4	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9998	0.9996	0.9992	0.9986	0.9977	0.9963	0.9923	0.9857	0.9763	0.9636
	5	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9998	0.9997	0.9994	0.9985	0.9968	0.9940	0.9896
	6	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9997	0.9994	0.9987	0.9974
	7	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9997	0.9994
	8	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999
	9	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

λ=		2.0	2.2	2.4	2.6	2.8	3.0	3.2	3.4	3.6	3.8	4.0	4.5	5.0	5.5
x=	0	0.1353	0.1108	0.0907	0.0743	0.0608	0.0498	0.0408	0.0334	0.0273	0.0224	0.0183	0.0111	0.0067	0.0041
	1	0.4060	0.3546	0.3084	0.2674	0.2311	0.1991	0.1712	0.1468	0.1257	0.1074	0.0916	0.0611	0.0404	0.0266
	2	0.6767	0.6227	0.5697	0.5184	0.4695	0.4232	0.3799	0.3397	0.3027	0.2689	0.2381	0.1736	0.1247	0.0884
	3	0.8571	0.8194	0.7787	0.7360	0.6919	0.6472	0.6025	0.5584	0.5152	0.4735	0.4335	0.3423	0.2650	0.2017
	4	0.9473	0.9275	0.9041	0.8774	0.8477	0.8153	0.7806	0.7442	0.7064	0.6678	0.6288	0.5321	0.4405	0.3575
	5	0.9834	0.9751	0.9643	0.9510	0.9349	0.9161	0.8946	0.8705	0.8441	0.8156	0.7851	0.7029	0.6160	0.5289
	6	0.9955	0.9925	0.9884	0.9828	0.9756	0.9665	0.9554	0.9421	0.9267	0.9091	0.8893	0.8311	0.7622	0.6860
	7	0.9989	0.9980	0.9967	0.9947	0.9919	0.9881	0.9832	0.9769	0.9692	0.9599	0.9489	0.9134	0.8666	0.8095
	8	0.9998	0.9995	0.9991	0.9985	0.9976	0.9962	0.9943	0.9917	0.9883	0.9840	0.9786	0.9597	0.9319	0.8944
	9	1.0000	0.9999	0.9998	0.9996	0.9993	0.9989	0.9982	0.9973	0.9960	0.9942	0.9919	0.9829	0.9682	0.9462
	10	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9998	0.9997	0.9995	0.9992	0.9987	0.9981	0.9972	0.9933	0.9863	0.9747
	11	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9999	0.9998	0.9996	0.9994	0.9991	0.9976	0.9945	0.9890
	12	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9999	0.9998	0.9997	0.9992	0.9980	0.9955
	13	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9997	0.9993	0.9983
	14	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9998	0.9994
	15	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9998
	16	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999
	17	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

$\lambda =$		6.0	6.5	7.0	7.5	8.0	8.5	9.0	9.5	10.0	11.0	10.0	12.0	14.0	15.0
$x =$	0	0.0025	0.0015	0.0009	0.0006	0.0003	0.0002	0.0001	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
	1	0.0174	0.0113	0.0073	0.0047	0.0030	0.0019	0.0012	0.0008	0.0005	0.0002	0.0005	0.0001	0.0000	0.0000
	2	0.0620	0.0430	0.0296	0.0203	0.0138	0.0093	0.0062	0.0042	0.0028	0.0012	0.0028	0.0005	0.0001	0.0000
	3	0.1512	0.1118	0.0818	0.0591	0.0424	0.0301	0.0212	0.0149	0.0103	0.0049	0.0103	0.0023	0.0005	0.0002
	4	0.2851	0.2237	0.1730	0.1321	0.0996	0.0744	0.0550	0.0403	0.0293	0.0151	0.0293	0.0076	0.0018	0.0009
	5	0.4457	0.3690	0.3007	0.2414	0.1912	0.1496	0.1157	0.0885	0.0671	0.0375	0.0671	0.0203	0.0055	0.0028
	6	0.6063	0.5265	0.4497	0.3782	0.3134	0.2562	0.2068	0.1649	0.1301	0.0786	0.1301	0.0458	0.0142	0.0076
	7	0.7440	0.6728	0.5987	0.5246	0.4530	0.3856	0.3239	0.2687	0.2202	0.1432	0.2202	0.0895	0.0316	0.0180
	8	0.8472	0.7916	0.7291	0.6620	0.5925	0.5231	0.4557	0.3918	0.3328	0.2320	0.3328	0.1550	0.0621	0.0374
	9	0.9161	0.8774	0.8305	0.7764	0.7166	0.6530	0.5874	0.5218	0.4579	0.3405	0.4579	0.2424	0.1094	0.0699
	10	0.9574	0.9332	0.9015	0.8622	0.8159	0.7634	0.7060	0.6453	0.5830	0.4599	0.5830	0.3472	0.1757	0.1185
	11	0.9799	0.9661	0.9467	0.9208	0.8881	0.8487	0.8030	0.7520	0.6968	0.5793	0.6968	0.4616	0.2600	0.1848
	12	0.9912	0.9840	0.9730	0.9573	0.9362	0.9091	0.8758	0.8364	0.7916	0.6887	0.7916	0.5760	0.3585	0.2676
	13	0.9964	0.9929	0.9872	0.9784	0.9658	0.9486	0.9261	0.8981	0.8645	0.7813	0.8645	0.6815	0.4644	0.3632
	14	0.9986	0.9970	0.9943	0.9897	0.9827	0.9726	0.9585	0.9400	0.9165	0.8540	0.9165	0.7720	0.5704	0.4657
	15	0.9995	0.9988	0.9976	0.9954	0.9918	0.9862	0.9780	0.9665	0.9513	0.9074	0.9513	0.8444	0.6694	0.5681
	16	0.9998	0.9996	0.9990	0.9980	0.9963	0.9934	0.9889	0.9823	0.9730	0.9441	0.9730	0.8987	0.7559	0.6641
	17	0.9999	0.9998	0.9996	0.9992	0.9984	0.9970	0.9947	0.9911	0.9857	0.9678	0.9857	0.9370	0.8272	0.7489
	18	1.0000	0.9999	0.9999	0.9997	0.9993	0.9987	0.9976	0.9957	0.9928	0.9823	0.9928	0.9626	0.8826	0.8195
	19	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9997	0.9995	0.9989	0.9980	0.9965	0.9907	0.9965	0.9787	0.9235	0.8752
	20	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9998	0.9996	0.9991	0.9984	0.9953	0.9984	0.9884	0.9521	0.9170
	21	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9998	0.9996	0.9993	0.9977	0.9993	0.9939	0.9712	0.9469
	22	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9999	0.9997	0.9990	0.9997	0.9970	0.9833	0.9673
	23	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9999	0.9995	0.9999	0.9985	0.9907	0.9805
	24	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9998	1.0000	0.9993	0.9950	0.9888
	25	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	1.0000	0.9997	0.9974	0.9938
	26	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9987	0.9967
	27	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9994	0.9983
	28	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9997	0.9991
	29	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9996
	30	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9998
	31	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999
	32	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

Table of Common Distributions

taken from *Statistical Inference* by Casella and Berger

Discrete Distrbutions (التوزيعات المتقطعة)

distribution	pmf (دالة الكثافة الاحتمالية)	mean (المتوسط)	variance((التباين)	mgf/moment((الدالة المولدة للعزوم)
Bernoulli(p)	$p^x(1-p)^{1-x};\ x=0,1;\ p\in(0,1)$	p	$p(1-p)$	$(1-p)+pe^t$
Beta-binomial(n,α,β)	$\binom{n}{x}\frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\frac{\Gamma(x+\alpha)\Gamma(n-x+\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta+n)}$	$\frac{n\alpha}{\alpha+\beta}$	$\frac{n\alpha\beta}{(\alpha+\beta)^2}$	
Notes: If $X\|P$ is binomial (n,P) and P is beta(α,β), then X is beta-binomial(n,α,β).				
Binomial(n,p)	$\binom{n}{x}p^x(1-p)^{n-x};\ x=1,\dots,n$	np	$np(1-p)$	$[(1-p)+pe^t]^n$
Discrete Uniform(N)	$\frac{1}{N};\ x=1,\dots,N$	$\frac{N+1}{2}$	$\frac{(N+1)(N-1)}{12}$	$\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}e^{it}$
Geometric(p)	$p(1-p)^{x-1};\ p\in(0,1)$	$\frac{1}{p}$	$\frac{1-p}{p^2}$	$\frac{pe^t}{1-(1-p)e^t}$
Note: $Y=X-1$ is negative binomial$(1,p)$. The distribution is *memoryless*: $P(X>s\|X>t)=P(X>s-t)$.				
Hypergeometric(N,M,K)	$\frac{\binom{M}{x}\binom{N-M}{K-x}}{\binom{N}{K}};\ x=1,\dots,K$	$\frac{KM}{N}$	$\frac{KM}{N}\frac{(N-M)(N-k)}{N(N-1)}$	?
	$M-(N-K)\le x\le M;\ N,M,K>0$			
Negative Binomial(r,p)	$\binom{r+x-1}{x}p^r(1-p)^x;\ p\in(0,1)$	$\frac{r(1-p)}{p}$	$\frac{r(1-p)}{p^2}$	$\left(\frac{p}{1-(1-p)e^t}\right)^r$
	$\binom{y-1}{r-1}p^r(1-p)^{y-r};\ Y=X+r$			
Poisson(λ)	$\frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!};\ \lambda\ge0$	λ	λ	$e^{\lambda(e^t-1)}$
Notes: If Y is gamma(α,β), X is Poisson$(\frac{x}{\beta})$, and α is an integer, then $P(X\ge\alpha)=P(Y\le y)$.				

Continuous Distributions

التوزيعات المتصلة

distribution	pdf	mean	variance	mgf/moment
Beta(α,β)	$\frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1};\ x\in(0,1),\ \alpha,\beta>0$	$\frac{\alpha}{\alpha+\beta}$	$\frac{\alpha\beta}{(\alpha+\beta)^2(\alpha+\beta+1)}$	$1+\sum_{k=1}^{\infty}\left(\prod_{r=0}^{k-1}\frac{\alpha+r}{\alpha+\beta+r}\right)\frac{t^k}{k!}$
Cauchy(θ,σ)	$\frac{1}{\pi\sigma}\frac{1}{1+(\frac{x-\theta}{\sigma})^2};\ \sigma>0$	does not exist	does not exist	does not exist
Notes: Special case of Students's t with 1 degree of freedom. Also, if X,Y are iid $N(0,1)$, $\frac{X}{Y}$ is Cauchy				
χ^2_p	$\frac{1}{\Gamma(\frac{p}{2})2^{\frac{p}{2}}}x^{\frac{p}{2}-1}e^{-\frac{x}{2}};\ x>0,\ p\in N$	p	$2p$	$\left(\frac{1}{1-2t}\right)^{\frac{p}{2}},\ t<\frac{1}{2}$
Notes: Gamma$(\frac{p}{2},2)$.				
Double Exponential(μ,σ)	$\frac{1}{2\sigma}e^{-\frac{\lvert x-\mu\rvert}{\sigma}};\ \sigma>0$	μ	$2\sigma^2$	$\frac{e^{\mu t}}{1-(\sigma t)^2}$
Exponential(θ)	$\frac{1}{\theta}e^{-\frac{x}{\theta}};\ x\geq 0,\ \theta>0$	θ	θ^2	$\frac{1}{1-\theta t},\ t<\frac{1}{\theta}$
Notes: Gamma$(1,\theta)$. Memoryless. $Y=X^{\frac{1}{\gamma}}$ is *Weibull*. $Y=\sqrt{\frac{2X}{\beta}}$ is *Rayleigh*. $Y=\alpha-\gamma\log\frac{X}{\beta}$ is *Gumbel*.				
F_{ν_1,ν_2}	$\frac{\Gamma(\frac{\nu_1+\nu_2}{2})}{\Gamma(\frac{\nu_1}{2})\Gamma(\frac{\nu_2}{2})}\left(\frac{\nu_1}{\nu_2}\right)^{\frac{\nu_1}{2}}\frac{x^{\frac{\nu_1-2}{2}}}{\left(1+(\frac{\nu_1}{\nu_2})x\right)^{\frac{\nu_1+\nu_2}{2}}};\ x>0$	$\frac{\nu_2}{\nu_2-2},\ \nu_2>2$	$2(\frac{\nu_2}{\nu_2-2})^2\frac{\nu_1+\nu_2-2}{\nu_1(\nu_2-4)},\ \nu_2>4$	$EX^n=\frac{\Gamma(\frac{\nu_1+2n}{2})\Gamma(\frac{\nu_2-2n}{2})}{\Gamma(\frac{\nu_1}{2})\Gamma(\frac{\nu_2}{2})}\left(\frac{\nu_2}{\nu_1}\right)^n,\ n<\frac{\nu_2}{2}$
Notes: $F_{\nu_1,\nu_2}=\frac{\chi^2_{\nu_1}/\nu_1}{\chi^2_{\nu_2}/\nu_2}$, where the χ^2s are independent. $F_{1,\nu}=t^2_\nu$.				
Gamma(α,β)	$\frac{1}{\Gamma(\alpha)\beta^\alpha}x^{\alpha-1}e^{-\frac{x}{\beta}};\ x>0,\ \alpha,\beta>0$	$\alpha\beta$	$\alpha\beta^2$	$\left(\frac{1}{1-\beta t}\right)^\alpha,\ t<\frac{1}{\beta}$
Notes: Some special cases are exponential ($\alpha=1$) and χ^2 ($\alpha=\frac{p}{2},\beta=2$). If $\alpha=\frac{2}{3},\ Y=\sqrt{\frac{X}{\beta}}$ is *Maxwell*. $Y=\frac{1}{X}$ is *inverted gamma*.				
Logistic(μ,β)	$\frac{1}{\beta}\frac{e^{-\frac{x-\mu}{\beta}}}{\left[1+e^{-\frac{x-\mu}{\beta}}\right]^2};\ \beta>0$	μ	$\frac{\pi^2\beta^2}{3}$	$e^{\mu t}\Gamma(1+\beta t),\ \lvert t\rvert<\frac{1}{\beta}$
Notes: The cdf is $F(x\lvert\mu,\beta)=\frac{1}{1+e^{-\frac{x-\mu}{\beta}}}$.				
Lognormal(μ,σ^2)	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\frac{1}{x}e^{-\frac{(\log x-\mu)^2}{2\sigma^2}};\ x>0,\sigma>0$	$e^{\mu+\frac{\sigma^2}{2}}$	$e^{2(\mu+\sigma^2)}-e^{2\mu+\sigma^2}$	$EX^n=e^{n\mu+\frac{n^2\sigma^2}{2}}$
Normal(μ,σ^2)	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}};\ \sigma>0$	μ	σ^2	$e^{\mu t+\frac{\sigma^2t^2}{2}}$
Pareto(α,β)	$\frac{\beta\alpha^\beta}{x^{\beta+1}};\ x>\alpha,\ \alpha,\beta>0$	$\frac{\beta\alpha}{\beta-1},\ \beta>1$	$\frac{\beta\alpha^2}{(\beta-1)^2(\beta-2)},\ \beta>2$	does not exist
t_ν	$\frac{\Gamma(\frac{\nu+1}{2})}{\Gamma(\frac{\nu}{2})}\frac{1}{\sqrt{\nu\pi}}\frac{1}{(1+\frac{x^2}{\nu})^{\frac{\nu+1}{2}}}$	$0,\ \nu>1$	$\frac{\nu}{\nu-2},\nu>2$	$EX^n=\frac{\Gamma(\frac{\nu+1}{2})\Gamma(\nu-\frac{n}{2})}{\sqrt{\pi}\Gamma(\frac{\nu}{2})}\nu^{\frac{n}{2}},\ n$ even
Notes: $t^2_\nu=F_{1,\nu}$.				
Uniform(a,b)	$\frac{1}{b-a},\ a\leq x\leq b$	$\frac{b+a}{2}$	$\frac{(b-a)^2}{12}$	$\frac{e^{bt}-e^{at}}{(b-a)t}$
Notes: If $a=0,\ b=1$, this is special case of beta ($\alpha=\beta=1$).				
Weibull(γ,β)	$\frac{\gamma}{\beta}x^{\gamma-1}e^{-\frac{x^\gamma}{\beta}};\ x>0,\ \gamma,\beta>0$	$\beta^{\frac{1}{\gamma}}\Gamma(1+\frac{1}{\gamma})$	$\beta^{\frac{2}{\gamma}}\left[\Gamma(1+\frac{2}{\gamma})-\Gamma^2(1+\frac{1}{\gamma})\right]$	$EX^n=\beta^{\frac{n}{\gamma}}\Gamma(1+\frac{n}{\gamma})$
Notes: The mgf only exists for $\gamma\geq 1$.				